

Thé du DMA, l'infini-catégorie des spectres : Sp

Maxime

1 avril 2020

1 Définition

Soit $H^* : (CW_*)^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$ une théorie cohomologique réduite (c'est-à-dire un foncteur sur la catégorie des CW-complexes pointés, vérifiant les axiomes d'Eilenberg-Steenrod; c'est une généralisation de la cohomologie singulière - ces axiomes sont des axiomes comme l'existence de la suite exacte de Mayer-Vietoris, qui permettent notamment de calculer les valeurs de H^*).

Alors, le théorème de *représentabilité de Brown* affirme que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\tilde{H}^n$ est *représentable*: il existe un CW-complexe pointé E_n tel que (en tant qu'ensembles) $H^n(X) \cong [X, E_n]$, naturellement en X ; où $[-, -]$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie de fonctions continues pointées $X \rightarrow E_n$.

De plus, les axiomes d'Eilenberg-Steenrod impliquent que $H^{n+1}(\Sigma X) \cong H^n(X)$, naturellement en X . Il s'ensuit que $[\Sigma -, E_{n+1}] \cong [-, E_n]$, or par l'adjonction $\Sigma \dashv \Omega$, on a $[\Sigma -, E_{n+1}] \cong [-, \Omega E_{n+1}]$, donc par le lemme de Yoneda on obtient une équivalence d'homotopie $E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$. D'où :

Définition 1. *Un Ω -spectre est une suite d'espaces pointés $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ munie d'équivalences d'homotopie $E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$.*

Inversement, tout Ω -spectre définit une théorie cohomologique réduite. Les deux notions ne sont pas pour autant équivalentes. En particulier il y a des phénomènes "au niveau des Ω -spectres" qui sont invisibles au niveau des espaces, et inversement, les phénomènes dits "instables" au niveau des espaces sont invisibles au niveau des spectres.

La notion de spectre est intéressante, parce qu'elle donne un autre visage aux théories cohomologiques (et elle permet de donner des exemples de théories homologiques, plus mystérieuses); et parce qu'elle permet entre autres de faire des constructions naturelles : prendre un "conoyau", un "noyau" entre "théories cohomologiques".

Le fait de vouloir prendre une -catégorie plutôt qu'une catégorie est là pour permettre de faire ces constructions de manière pertinente homotopiquement. On a ainsi :

Définition 2. Soit $\mathcal{S}_*$ l' ∞ -catégorie des espaces pointés, et $\Omega : \mathcal{S}_* \rightarrow \mathcal{S}_*$ le foncteur espace des lacets. L' ∞ -catégorie des spectres, $\mathbf{Sp}$ est par définition la limite dans l' ∞ -catégorie des ∞ -catégories du système $\cdots \rightarrow \mathcal{S}_* \xrightarrow{\Omega} \mathcal{S}_* \xrightarrow{\Omega} \mathcal{S}_*$

Remarques 1. - On écrit ici "limite" comme quand on fait des catégories, mais il faut prendre en compte le fait que tout est fait de manière "homotopie-cohérente" ici, donc c'est une limite en un sens homotopique (la seule qui a un sens ici, de toute façon).

- Si on analyse cette définition, on se rend compte qu'elle est quasiment comme celle d'avant : un objet de $\mathbf{Sp}$ est une suite d'espaces pointés (E_n) , avec une équivalence d'homotopie $E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$, sauf qu'on a aussi des équivalences d'homotopie $E_n \rightarrow \Omega^2 E_{n+2}$, et qu'on a une homotopie entre celle-ci et la flèche induite $E_n \rightarrow \Omega E_{n+1} \rightarrow \Omega^2 E_{n+2}$ et pareil en augmentant les degrés. De plus, dans cette ∞ -catégorie il y a des morphismes de "dimension supérieure".

2 Exemple

Jusque là la discussion est très abstraite, mais voyons ce que ça donne avec un exemple concret : on prend la cohomologie singulière réduite : $\tilde{H}^*(-; \mathbb{Z})$.

Le théorème de Brown nous affirme que pour tout n , on a un espace E_n avec $\tilde{H}^n(X; \mathbb{Z}) \cong [X, E_n]$. En prenant $X = S^k$, la sphère de dimension k , on en déduit que E_n n'a qu'un seul groupe d'homotopie non trivial : π_n .

Il s'ensuit que $E_n \simeq K(\mathbb{Z}, n)$, le n -ème espace d'Eilenberg-MacLane du groupe $\mathbb{Z}$ (c'est une sphère à laquelle on a ajouté des choses pour tuer l'homotopie supérieure).

Pour exemplifier encore plus, on a par exemple : $K(\mathbb{Z}, 0) = \mathbb{Z}; K(\mathbb{Z}, 1) = S^1; K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty$.

Il suit de la discussion précédente que $\Omega \mathbb{C}P^\infty \simeq S^1$ et $\Omega S^1 \simeq \mathbb{Z}$

3 Théorème

Il y a beaucoup de machinerie à construire pour énoncer des théorèmes intéressants. Je vais admettre plein plein de trucs et essayer d'en énoncer un qui inscrit l'algèbre homologique dans $\mathbf{Sp}$, et montre qu'en un sens, les spectres sont une généralisation de l'algèbre homologique.

Particulièrement, plus haut on a vu comment définir un spectre qui représente la cohomologie singulière à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Si on remplace ces coefficients par un groupe abélien A quelconque, on peut définir HA , le spectre d'Eilenberg-MacLane de A .

En fait, plus généralement, on peut définir un spectre "d'Eilenberg-MacLane" HC pour tout complexe de chaîne C . Cela forme un foncteur, qui en fait se factorise à travers la (∞) -catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathbf{Ab})$.

On a donc un ∞ -foncteur $\mathcal{D}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{Sp}$.

En fait, on peut aussi définir un "produit tensoriel" dans $\mathbf{Sp}$, qui permet de parler

d'anneaux, de modules sur ces anneaux etc. $H\mathbb{Z}$ est "naturellement" un tel anneau, et pour tout complexe de chaîne C , HC est naturellement un $H\mathbb{Z}$ -module. Notre ∞ -foncteur se factorise donc comme $\mathcal{D}(\mathbf{Ab}) \rightarrow H\mathbb{Z} - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Sp}$. On a alors un résultat qui nous dit que toute la complexité de l'algèbre homologique se retrouve dans $\mathbf{Sp}$:

Théorème 1. *L' ∞ -foncteur $\mathcal{D}(\mathbf{Ab}) \rightarrow H\mathbb{Z} - \mathbf{Mod}$ est une équivalence d' ∞ -catégories.*