

Propriétés universelles et catégories (Projet d'algèbre)

1 Introduction

Le but de cette présentation est de présenter des propriétés universelles et de formaliser un peu cette notion du point de vue de la théorie des catégories. On commencera par donner des exemples d'objets vérifiant certaines propriétés universelles pour donner une intuition de ces propriétés et motiver les définitions suivantes; puis on donnera des exemples plus généraux de propriétés universelles dans des catégories quelconques (après avoir défini la notion de catégorie); on aborde ensuite la définition fonctorielle de ces propriétés et des limites, ainsi que de la représentabilité.

2 Exemples

On va tenter de donner différents exemples de propriétés universelles et d'objets les satisfaisant, dans différents domaines des mathématiques, pour montrer leur omniprésence. Pour ce faire, on a choisi de donner un exemple issu de chacun des cours de L3 donnés au DMA.

2.1 En théorie de la mesure : la tribu produit

Soit $(E, \mathcal{E}), (F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables. On rappelle que l'espace produit est $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$, où $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ est $\sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}\})$ ($\sigma(C)$ étant la tribu engendrée par C).

Remarquons dès maintenant qu'on a deux applications canoniques $\pi_1 : E \times F \rightarrow E, \pi_2 : E \times F \rightarrow F$, à savoir les deux projections canoniques sur la première et la deuxième coordonnée respectivement. Une question naturelle est de savoir quand est-ce qu'elles sont mesurables, pour $\mathcal{T}$ une tribu sur $E \times F$? Si elles le sont, alors pour $A \in \mathcal{E}, \pi_1^{-1}(A) \in \mathcal{T}$, et donc $A \times F \in \mathcal{T}$. De même, pour $B \in \mathcal{F}, E \times B \in \mathcal{T}$. Comme $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie, $A \times B \in \mathcal{T}$.

Ainsi, si π_1, π_2 sont mesurables, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \subset \mathcal{T}$. La réciproque est claire par ce qui précède. Ainsi $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ est la tribu la plus fine qui rend π_1, π_2 mesurables.

Remarquons de plus la chose suivante: une application $C \rightarrow E \times F$ est essentiellement la donnée d'un couple d'applications $(C \rightarrow E, C \rightarrow F)$. En effet, si on a $f : C \rightarrow E \times F$, alors $\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f$ constitue un tel couple, et réciproquement, si (g, h) est un tel couple alors $\langle g, h \rangle : x \mapsto (g(x), h(x))$ est une telle application; ces deux procédés étant clairement inverses l'un de l'autre.

La question naturelle est alors de savoir quand est-ce que ces procédés préservent la mesurabilité? Clairement, si π_1, π_2 sont mesurables, le procédé $f \mapsto (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$ préserve la mesurabilité car une composition d'applications mesurables est mesurable. Qu'en est-il de la réciproque? Si g, h sont mesurables, $\langle g, h \rangle$ l'est-elle?

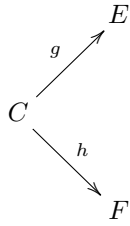
Si $A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}, (\langle g, h \rangle)^{-1}(A \times B) = g^{-1}(A) \cap h^{-1}(B)$ est donc mesurable, et donc si $E \times F$ est muni de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, $g \times h$ est mesurable. Ainsi on a établi :

Proposition : Soit $(E, \mathcal{E}), (F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables. Pour tout $(C, \mathcal{C})$ espace mesurable, l'application

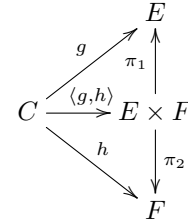
$$\text{Hom}((C, \mathcal{C}), (E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})) \rightarrow \text{Hom}((C, \mathcal{C}), (E, \mathcal{E})) \times \text{Hom}((C, \mathcal{C}), (F, \mathcal{F}))$$

définie par $f \mapsto (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$ est bien définie et bijective (où $\text{Hom}(A, B)$ désigne l'ensemble des applications mesurables $A \rightarrow B$; on a rendu visibles les tribus).

L'injectivité est en fait claire depuis le début, la partie importante du théorème est donc la surjectivité : pour tout C et toutes applications mesurables



il existe une unique application mesurable $\langle g, h \rangle$ faisant commuter :



Cette propriété est dite "propriété universelle du produit". On a insisté sur beaucoup de points pour cet exemple pour que les idées soient claires; les autres exemples seront moins détaillés.

2.2 En topologie : la topologie somme

Soit I un ensemble quelconque, et $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques disjoints (la condition "disjoints" est superflue mais facilite la présentation de ce qui suit. Il est clair qu'en mettant $X'_i := X_i \times \{i\}$ on peut s'en passer). On rappelle que l'espace somme, noté $\coprod_{i \in I} X_i$ est l'espace topologique

dont l'ensemble de base est $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ (la réunion disjointe des X_i , puisqu'on a fait l'hypothèse que

les X_i étaient disjoints, il s'agit simplement de l'union) et dont les ouverts sont les parties dont l'intersection avec chaque X_i est ouverte dans X_i .

On remarque alors que pour tout $i \in I$, on a une inclusion canonique $\iota_i : X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$.

La topologie qu'on a définie sur $\coprod_{i \in I} X_i$ est telle que $\iota_i^{-1}(U) = X_i \cap U$ est ouvert dans X_i pour tout

ouvert U , de sorte que ι_i est continue. De plus, on a vu en cours (sur les topologies finales) que $f : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow E$ est continue (E espace topologique) si et seulement si chaque $f \circ \iota_i$ est continue (le

"seulement si" étant clair car les ι_i le sont, et la continuité est stable par composition; la partie importante est donc le "si"). De plus, par définition de la réunion disjointe, il est clair qu'une telle fonction est entièrement déterminée par les $f \circ \iota_i$.

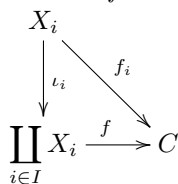
Ainsi si on note $\text{Hom}(A, B)$ l'ensemble des applications continues $A \rightarrow B$, on a obtenu :

Proposition : Soit I un ensemble et $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et $\coprod_{i \in I} X_i$ leur somme topologique. Alors pour tout espace topologique E , l'application

$$\text{Hom}\left(\coprod_{i \in I} X_i, E\right) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}(X_i, E)$$

qui à f associe $(f \circ \iota_i)_{i \in I}$ est bijective.

Autrement dit, dès lors qu'on a des applications continues $X_i \xrightarrow{f_i} C$ on a une unique application continue f faisant commuter chaque diagramme :



Cette propriété est dite "propriété universelle du coproduit".

2.3 En algèbre: le premier théorème d'isomorphisme

Soit G un groupe, H un sous-groupe distingué, $f : G \rightarrow K$ un morphisme de groupes. Le premier théorème d'isomorphisme dit que f se factorise par $G \xrightarrow{\pi} G/H$ si et seulement si $H \subset \text{Ker } f$.

La condition $H \subset \text{Ker } f$ se réécrit $f \circ i_H = f \circ 0$, où $H \xrightarrow{i_H} G$ est l'inclusion et $H \xrightarrow{0} G$ est le morphisme trivial; elle se réécrit donc en disant que le diagramme suivant commute :

$$H \xrightarrow[0]{i_H} G \xrightarrow{f} K.$$

Ainsi le premier théorème d'isomorphisme nous dit que pour $H \triangleleft G$, et $f : G \rightarrow K$, il existe un morphisme $\bar{f} : G/H \rightarrow K$ faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & K \\ \downarrow \pi & \searrow \bar{f} & \\ G/H & & \end{array}$$

si et seulement si ce diagramme $H \xrightarrow[0]{i_H} G \xrightarrow{f} K$ commute, et dans ce cas l'application $\bar{f}$ est unique (ce qui est clair car π est surjective).

Cette propriété universelle (celle de G/H) est appelée propriété universelle de coégaliseur, et elle est résumée dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H \xrightarrow[0]{i_H} G & \xrightarrow{\pi} & G/H \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & K \end{array}$$

Si on veut l'exprimer en termes de Hom comme pour les précédentes, notant $\text{Hom}(A, B)$ l'ensemble des morphismes $A \rightarrow B$ et $\text{Hom}_H(A, B)$ l'ensemble des morphismes $A \rightarrow B$ dont la restriction à H est triviale, cela donne :

L'application $\text{Hom}(G/H, K) \rightarrow \text{Hom}_H(G, K)$ qui, à g associe $g \circ \pi$ est bijective.

3 Exemples plus généraux, la définition de la notion de catégorie

Il s'avère que le cadre approprié pour traiter de ces propriétés semble être celui des catégories. Une chose que l'on remarque en effet très vite est que dans leur énoncé, on ne s'intéresse qu'aux applications (mesurables, continues, morphismes), pas aux éléments par exemple. La définition que l'on présente maintenant peut sembler arbitraire mais s'est développée historiquement autour de nombreux exemples et avec une réflexion approfondie. Dans nos notations, on adopte les conventions anglophones.

Définition : Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'une collection d'objets $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, de flèches $\mathbf{Ar}(\mathcal{C})$, de deux fonctions $s, t : \mathbf{Ar}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ (source, target - source et cible en français), d'une loi de composition interne partielle $\circ : \mathbf{Ar}(\mathcal{C}) \times \mathbf{Ar}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ar}(\mathcal{C})$ définie sur (f, g) si et seulement si $t(f) = s(g)$ (alors on note $\circ((f, g)) = g \circ f$), vérifiant les conditions suivantes :

- Si $g \circ f$ est définie, alors $t(g \circ f) = t(g)$, $s(g \circ f) = s(f)$;
- par ce qui précède, si h, g, f sont telles que $h \circ g$ et $g \circ f$ sont définies alors $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ le sont aussi, on demande alors qu'elles soient égales;
- pour tout $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, il existe $id_A \in \mathbf{Ar}(\mathcal{C})$ telle que $s(id_A) = t(id_A) = A$ et pour tout $f, g \in \mathbf{Ar}(\mathcal{C})$, si $t(f) = A$ alors $id_A \circ f = f$ et si $s(g) = A$ alors $g \circ id_A = g$.

La deuxième condition imposée signifie essentiellement que $\circ$ doit être associative dès que cela a un sens.

Exemples :

1. La catégorie, notée **Set** (pour les plus francophones, **Ens**) dont les objets sont les ensembles et les flèches les applications entre ces ensembles (vu comme triplets (A, B, f) où $f \subset A \times B$); $\circ$ étant la composition usuelle, et id_A l'application $A \rightarrow A$ définie par $x \mapsto x$
2. La catégorie des groupes, **Grp** dont les objets sont les groupes et les flèches sont les morphismes de groupes entre eux; à nouveau $\circ$ est la composition usuelle et id_A la fonction identité sur A (qui est bien un morphisme de groupes). Plus généralement, on peut définir toutes les catégories "algébriques" comme la catégorie **Ring** des anneaux, k - **Vect** des k -espaces vectoriels, etc.
3. La catégorie **Top** dont les objets sont les espaces topologiques et les flèches sont les applications continues (on ne précise plus la composition ni l'identité lorsque c'est clair). La catégorie **Mes** (attention, cette notation n'est pas standard) des espaces mesurables et des applications mesurables entre eux.
4. Attention, toutes les catégories ne sont pas de la forme "tels objets et telles applications respectant telle structure entre eux": certaines ne le sont pas à première vue, comme la catégorie **Rel** des ensembles et relations entre eux; mais d'autres sont essentiellement différentes (en un sens précis, voir par exemple [3]) de telles catégories, comme **hTop**, la catégorie des espaces topologiques et applications continues à homotopie près (pour voir qu'elle n'est pas concrète au sens de [3], le.a. lectrice pourra se référer à [4]).

Quelques notations: pour deux objets A, B de la catégorie $\mathcal{C}$, on note $\mathcal{C}(A, B)$ ou $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (ou $\text{Hom}(A, B)$ lorsque le contexte est clair) la collection des flèches f de $\mathcal{C}$ telles que $s(f) = A, t(f) =$

B . Une telle flèche est notée $f : A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$. Ainsi, $A \xrightarrow{f} B$ et $C \xrightarrow{g} D$ sont composables si et seulement si $C = D$, et alors on note $A \xrightarrow{g \circ f} D$ ou encore $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} D$ la composition de ces deux flèches (noter l' "inversion" dans la notation $g \circ f$ - elle est historique, liée à la catégorie des ensembles, et certains auteurs notent plutôt fg ou $f;g$ ou plein d'autres notations pour aller en accord avec la notation graphique; on ne le fera pas ici).

Remarquons qu'on ne précise pas ce qu'on entend par collection (par exemple il est connu que la collection des ensembles n'est pas un ensemble); on laisse cette notion intuitive sans plus de précision, le.a. lectrice intéressé.e pourra par exemple se référer à [5]; on s'entendra donc sur le fait que parler de "collection" n'est pas problématique ici et le.a. lectrice devra me faire confiance. Une catégorie $\mathcal{C}$ telle que $\text{Ob}(\mathcal{C}) \cup \text{Ar}(\mathcal{C})$ soit un ensemble est dite petite; et si pour tous $A, B \in \mathcal{C}(A, B)$ est un ensemble, $\mathcal{C}$ sera dite localement petite. La plupart des catégories intéressantes sont localement petites.

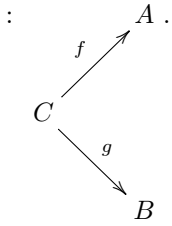
Une dernière notion qu'on introduit est celle d'isomorphisme : une flèche $f : A \rightarrow B$ est un isomorphisme si et seulement si il existe $g : B \rightarrow A$ telle que $f \circ g = id_B, g \circ f = id_A$. Essentiellement, deux objets isomorphes seront indistinguables "du point de vue de $\mathcal{C}$ ". On vérifie facilement que pour les exemples donnés ci-avant, la notion d'isomorphisme qu'on vient de donner coïncide avec la notion usuelle. On vérifie de plus facilement dans le cas général que "être isomorphe" est une relation d'équivalence, que si f est un isomorphisme, alors le g tel que $g \circ f = id_A$ et $f \circ g = id_B$ est unique (noté alors f^{-1}).

On s'en tient ici à propos des catégories dans cette section. On va désormais montrer comment les exemples qu'on a donnés sont généralisables dans un cadre catégorique plus abstrait.

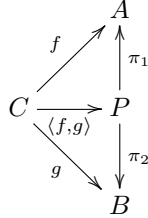
3.1 Le produit

On peut parler de produit d'arité quelconque, mais dans ce qui suit on ne parlera que de produit binaire pour montrer le lien avec l'exemple donné dans la section 2.1.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et A, B deux objets de $\mathcal{C}$. Un triplet (C, f, g) constitué d'un objet C et de deux flèches $f : C \rightarrow A, g : C \rightarrow B$ est appelé un cône; on le représente sous forme de diagramme



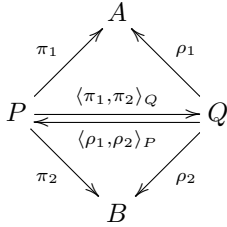
Un cône (P, π_1, π_2) est appelé *produit* de A et B si et seulement si il vérifie la propriété suivante : pour tout cône (C, f, g) , il existe une unique flèche, notée $\langle f, g \rangle$ telle que le diagramme suivant commute :



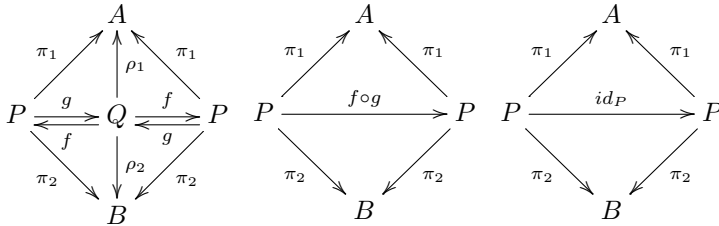
c'est-à-dire telle que $\pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f, \pi_2 \circ \langle f, g \rangle = g$. Autrement dit, (P, π_1, π_2) est un produit de A et B si et seulement si pour tout objet C , l'application $\mathcal{C}(C, P) \rightarrow \mathcal{C}(C, A) \times \mathcal{C}(C, B)$ définie par $h \mapsto (\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h)$ est bijective.

Remarquons que depuis le début on dit "un produit de A et B ", alors que dans la section précédente on parlait *du* produit de E et F . Cela vient du fait qu'a priori, les produits de A et B ne sont pas uniques (en fait même dans la section précédente il n'était pas unique; on en avait juste un canonique). En fait ils sont simplement uniques à isomorphisme près. C'est une caractéristique des propriétés universelles: elles ne déterminent jamais un objet entièrement, elles le déterminent uniquement à isomorphisme près. Voyons cela pour le produit : soit (P, π_1, π_2) et (Q, ρ_1, ρ_2) deux produits de A, B . Comme la notation $\langle f, g \rangle$ est désormais ambiguë, on notera (avec des sens évidents) $\langle f, g \rangle_P, \langle f, g \rangle_Q$.

Remarquons que (P, π_1, π_2) et (Q, ρ_1, ρ_2) sont deux cônes, et donc on obtient $\langle \rho_1, \rho_2 \rangle_P : Q \rightarrow P$ et $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle_Q : P \rightarrow Q$:



On note ces applications f, g respectivement. Calculons $f \circ g : P \rightarrow P$ et $g \circ f : Q \rightarrow Q$. $\pi_1 \circ (f \circ g) = (\pi_1 \circ f) \circ g = \rho_1 \circ g$ par définition, et donc $\pi_1 \circ (f \circ g) = \pi_1$.



De même, $\pi_2 \circ (f \circ g) = \pi_2$. Or $\pi_1 \circ id_P = \pi_1$ et $\pi_2 \circ id_P = \pi_2$ par définition de catégorie. Donc par unicité dans la définition de produit (appliquée au produit (P, π_1, π_2) et au cône (P, π_1, π_2)), on a $f \circ g = id_P$. De même, $g \circ f = id_Q$. Ainsi f, g sont des isomorphismes réciproques, et P et Q sont donc isomorphes. De plus, cet isomorphisme commute avec $\pi_1, \pi_2, \rho_1, \rho_2$ au sens où $\pi_1 \circ f = \rho_1$, $\pi_2 \circ f = \rho_2$. Ainsi c'est en fait un "isomorphisme de cônes" entre (P, π_1, π_2) et (Q, ρ_1, ρ_2) (on a mis des guillemets parce qu'on n'a pas défini cette notion; mais on laisse au.à la lectrice le soin de trouver une catégorie dans laquelle il s'agit bien d'un isomorphisme). On verra plus tard que si on regarde cet isomorphisme comme un "isomorphisme de cônes", alors il est unique.

On peut donc "presque" parler *du* produit de deux objets lorsqu'il existe.

Le travail fait dans la section précédente montre qu'en fait $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ est le produit de $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ dans **Mes**, la catégorie des espaces mesurables et des applications mesurables. On laisse en exercice la vérification que $A \times B$ est le produit de A et B dans **Set** (resp. dans **Grp**, **Top**, **Ring**).

Le fait que l'ensemble sous-jacent du produit dans ces trois derniers cas soit le produit des ensembles sous-jacents n'est pas dû au hasard; mais expliquer pourquoi dépasse le cadre de cette présentation (pour ceux.lles qui savent ce que ça veut dire, c'est dû au fait que le foncteur d'oubli vers **Set** a un adjoint à gauche et donc respecte les limites, en particulier les produits).

3.2 Le coproduit

Le.a lecteurice attentif.ve remarquera entre cette sous-section et la précédente une similarité très forte, presque une *dualité*. C'est normal: il y en a une.

On considère une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$. Un cocône est un couple $(C, (f_i)_{i \in I})$ où chaque $f_i : X_i \rightarrow C$ est une flèche de $\mathcal{C}$. Un coproduit des X_i est un cocône $(C, (\iota_i)_{i \in I})$ vérifiant la propriété suivante : pour tout cocône $(Q, (f_i)_{i \in I})$, il existe une unique flèche $[(f_i)_{i \in I}] : C \rightarrow Q$ faisant commuter tous les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} X_i & & \\ \downarrow \iota_i & \searrow f_i & \\ C & \xrightarrow{[(f_i)_{i \in I}]} & Q \end{array}$$

$$[(f_i)_{i \in I}] \circ \iota_i = f_i.$$

Autrement dit, le cocône $(C, (\iota_i)_{i \in I})$ est un coproduit des X_i si et seulement si pour tout objet Q , l'application $\mathcal{C}(C, Q) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{C}(X_i, Q)$ définie par $f \mapsto (f \circ \iota_i)_{i \in I}$ est bijective.

A nouveau, on a dit "un coproduit" car le coproduit n'est a priori pas unique, et c'est toujours pour la même raison que dans la section précédente on parlait de "la somme topologique" des espaces X_i : c'est simplement parce que dans ce cas on a un coproduit canonique.

La preuve de la section 3.1 s'adapte sans problème pour vérifier que les coproduits des X_i , s'ils existent, sont tous isomorphes (ce sont même des cocônes isomorphes, où le flou est laissé de la même manière qu'à la section 3.1 - et de même, lorsqu'on regarde l'isomorphisme en tant qu'isomorphisme de cocônes, il est unique).

La section 2.2 établissait donc que la somme topologique des X_i , avec les inclusions canoniques, est un coproduit des X_i .

3.3 Le coégaliseur

On considère une paire de flèches (dites parallèles) $A \rightrightarrows B$ dans $\mathcal{C}$. Le problème qui nous in-

téresse ici est de coégaliser ces flèches, c'est-à-dire de trouver une flèche h telle que $A \rightrightarrows B \xrightarrow{h} C$.

Ce qui nous intéresse est une telle flèche qu'on pourrait qualifier de "meilleure que les autres". On appelle un couple admissible un couple (C, h) où C est un objet, $h : B \rightarrow C$ est tel que $h \circ f = h \circ g$. Le couple admissible (C, e) est un coégaliseur de (f, g) si et seulement si pour tout couple admissible (K, h) , il existe une unique flèche $\bar{h} : C \rightarrow K$ telle que $\bar{h} \circ e = h$, en diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \rightrightarrows & B \xrightarrow{h} C \\ & \searrow & \downarrow \bar{h} \\ & & K \end{array}$$

On a le même problème d'unicité en cas d'existence, et on vérifie facilement qu'un coégaliseur est unique seulement à isomorphisme près lorsqu'il existe (ici l'isomorphisme est dans la catégorie notée $B/\mathcal{C}$ dite "sous B "; et à nouveau, si on le regarde dans cette catégorie, il est unique).

Le premier théorème d'isomorphisme nous dit donc que, lorsque $H \triangleleft G$, $\pi : G \rightarrow G/H$ est un coégaliseur de $(i_H, 0)$ (en reprenant les notations de la section précédente).

3.4 Objet initial, objet final

On n'en a pas parlé dans la section précédente, mais ces notions seront utiles pour la suite. Un objet initial dans $\mathcal{C}$ est un objet I tel que pour tout objet A , il existe exactement une flèche $I \rightarrow A$. Par exemple dans **Grp**, le groupe trivial est un objet initial, dans **Ring**, $\mathbb{Z}$ est un objet initial. Une preuve similaire à celle des exemples précédents montre que deux objets initiaux quelconques sont isomorphes.

Un objet final dans $\mathcal{C}$ est un objet F (souvent noté 1) tel que pour tout objet A il existe exactement une flèche $A \rightarrow F$. Dans **Grp**, le groupe trivial est aussi un objet final (on parle alors d'objet zéro), dans **Rng**, c'est l'anneau trivial qui est un objet final, dans **Set**, tout singleton $\{\star\}$ est un objet final. Les objets finaux sont aussi uniques à isomorphisme près.

4 Formalisme fonctoriel, limites de foncteurs et représentabilité

Le but de cet section est de rassembler ce qui semble être des exemples isolés dans un même concept et de montrer en quoi le cadre catégorique est un point de vue adapté pour les généraliser. Cela nous permettra en particulier de faire en une seule fois toutes les preuves d'unicité à isomorphisme près.

Notre formalisation passe par la notion de foncteurs, qui sont les "morphisme de catégories". En effet, une catégorie est juste un objet algébrique; un peu particulier certes, mais un objet algébrique tout de même, les catégories ont donc droit à leur propre notion de morphisme.

Définition : Soit $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est la donnée de deux applications (toujours notées F), une $F : \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$ et une autre $F : \mathbf{Ar}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ar}(\mathcal{D})$ telles que pour tout $f, g \in \mathbf{Ar}(\mathcal{C})$, $F(t(f)) = t(F(f))$, $F(s(f)) = s(F(f))$; si $g \circ f$ est définie alors $F(g) \circ F(f)$ est donc aussi définie, on demande alors $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$; et pour tout $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, $F(id_A) = id_{F(A)}$.

On note aussi bien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ que $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$. Souvent, pour un objet A de $\mathcal{C}$ on note FA plutôt que $F(A)$ (on le fait quelques fois pour les flèches aussi, mais c'est plus rare).

Ainsi un foncteur est un "morphisme de catégories", c'est-à-dire une application entre catégories qui respecte la structure de ces dernières. Il est ainsi clair que la composition de deux foncteurs est un foncteur.

Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur, où $\mathcal{C}$ est petite (c'est une hypothèse technique peu importante pour notre développement ici -on notera X l'ensemble des objets de $\mathcal{C}$). On définit deux nouvelles catégories (on peut faire encore plus général mais ça n'est pas la peine pour ce qu'on veut faire ici) à partir de ces données : $F/\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}/F$ (attention nos notations ne sont pas forcément standard)

Définitions :

1. Les objets de $F/\mathcal{D}$ sont les couples $(A, (f_x)_{x \in X})$ où A est un objet de $\mathcal{D}$ et pour tout $x \in X$, $f_x : F(x) \rightarrow A$ est une flèche de $\mathcal{D}$, tel que pour toute $\mathcal{C}$ -flèche $g : x \rightarrow y$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} F(x) & & \\ \downarrow & \searrow f_x & \\ & & A \\ \uparrow F(g) & \nearrow f_y & \\ F(y) & & \end{array}$$

Une flèche $m : (A, (f_x)_{x \in X}) \rightarrow (B, (g_x)_{x \in X})$ est une $\mathcal{D}$ -flèche $m : A \rightarrow B$ telle que pour tout $x \in X$, $m \circ f_x = g_x$.

2. Les objets de $\mathcal{D}/F$ sont les couples $(A, (f_x)_{x \in X})$ où A est un objet de $\mathcal{D}$ et pour tout $x \in X$, $f_x : A \rightarrow F(x)$ est une flèche de $\mathcal{D}$, tel que pour toute $\mathcal{C}$ -flèche $g : x \rightarrow y$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} F(x) & & \\ \uparrow f_x & \nearrow & A \\ & & \\ \downarrow F(g) & \searrow f_y & \\ F(y) & & \end{array}$$

Une flèche $m : (A, (f_x)_{x \in X}) \rightarrow (B, (g_x)_{x \in X})$ est une $\mathcal{D}$ -flèche $m : A \rightarrow B$ telle que pour tout $x \in X$, $g_x \circ m = f_x$.

On ne fait pas les vérifications, mais $F/\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}/F$ sont alors des catégories.

Exemples :

1. Si on pose $\mathbf{2}$ la catégorie qui a deux objets et deux flèches (il n'en existe qu'une à isomorphisme près, laquelle on choisit importe peu ici - un isomorphisme de catégories étant un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tel qu'il existe un foncteur $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tel que $F \circ G = \text{Id}_{\mathcal{D}}$ et $G \circ F = \text{Id}_{\mathcal{C}}$, où $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ désigne le foncteur identité), alors un foncteur $F : \mathbf{2} \rightarrow \mathcal{D}$ consiste essentiellement en le choix de deux objets A, B de $\mathcal{D}$. On voit alors que $F/\mathcal{D}$ est ce qu'on aurait voulu appeler la catégorie des cocônes, et $\mathcal{D}/F$ est ce qu'on aurait voulu appeler la catégorie des cônes.
2. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie qui a deux objets, disons 0 et 1 et entre ces deux objets deux flèches distinctes $f, g : 0 \rightarrow 1$ (et il y a aussi les flèches identités). On n'a pas à définir la composition car elle découle des axiomes de catégorie. Cette catégorie est souvent notée diagrammatiquement, par exemple $\bullet \rightrightarrows \bullet$. Alors un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consiste en le choix de deux objets A, B et deux flèches $f, g : A \rightarrow B$. Alors $F/\mathcal{D}$ est essentiellement la catégorie des couples (C, h) où $h : B \rightarrow C$ coégalise (f, g) . $\mathcal{D}/F$ est essentiellement la catégorie des couples (C, h) où $h : C \rightarrow A$ égalise (f, g) (ici "essentiellement" est à prendre en un sens vague; bien qu'on puisse le rendre plus précis)

Ces exemples et leur rapport avec les exemples précédents semblent indiquer qu'une propriété universelle est essentiellement la donnée d'une petite catégorie $\mathcal{C}$ (qui représente la "forme" d'un diagramme), et qu'on instancie ce diagramme via un foncteur. Alors un objet "vérifie la propriété universelle" associée au foncteur si c'est le "meilleur" objet de $\mathcal{D}/F$ ou de $F/\mathcal{D}$. On verra que c'est presque ça. Allons au bout de cette idée. Cela nous pousse à définir les notions suivantes :

Définition : -Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur, $\mathcal{C}$ petite. On dit que F admet une limite si et seulement si $\mathcal{D}/F$ admet un objet final, et l'objet de $\mathcal{D}$ associé est noté $\text{Lim}F$ (il n'y a pas, à ma connaissance, de notation privilégiée pour les flèches associées. On parlera souvent de flèches canoniques).

- Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur, $\mathcal{C}$ étant petite. On dit que F admet une colimite si et seulement si $F/\mathcal{D}$ admet un objet initial, et l'objet de $\mathcal{D}$ associé est alors noté $\text{Colim}F$ (à nouveau, il n'y a pas, à ma connaissance, de notation privilégiée pour les flèches associées, mais on parle toujours de flèches canoniques).

Dans les exemples donnés juste avant, la limite correspond (lorsqu'elle existe) au produit, et à ce qu'on appelle l'égaliseur; la colimite correspond (lorsqu'elle existe) au coproduit et au coégaliseur. On laisse en exercice la vérification que les définitions coïncident.

Comme les objets finaux et initiaux sont uniques à isomorphismes près, on en déduit que les limites et colimites le sont aussi (un isomorphisme dans $\mathcal{D}/F$ ou dans $F/\mathcal{D}$ se "restreint" en un isomorphisme dans $\mathcal{D}$); et donc on obtient comme cas particuliers toutes les unicités à (unique) isomorphisme près des exemples précédents.

On va maintenant faire une remarque concernant la forme d'un foncteur F admettant une (co)limite. On ne considère désormais plus que des catégories localement petites, de sorte que $\mathcal{D}(A, B)$ sera toujours un ensemble. Remarquons que si on a une flèche $f : C \rightarrow A$ alors on en déduit une application $\mathcal{D}(B, f) : \mathcal{D}(B, C) \rightarrow \mathcal{D}(B, A)$ définie par $g \mapsto f \circ g$. Ainsi, si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur, et $\mathcal{D}/F$ a un objet final $(\text{Lim}F, (f_x)_{x \in X})$ alors pour tout $x \in X$ et tout $\mathcal{D}$ -objet B on obtient une application $\mathcal{D}(B, f_x) : \mathcal{D}(B, \text{Lim}F) \rightarrow \mathcal{D}(B, F(x))$.

Si de plus $h : x \rightarrow y$ est une $\mathcal{C}$ -flèche, alors on peut se demander si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{D}(B, F(x)) & \\
 \mathcal{D}(B, f_x) \nearrow & \downarrow \mathcal{D}(B, F(h)) & \\
 \mathcal{D}(B, \text{Lim}F) & & \\
 \searrow \mathcal{D}(B, f_y) & & \mathcal{D}(B, F(y))
 \end{array}$$

Il s'agit ici d'un diagramme dans **Set** donc il suffit de vérifier la commutation "élément par élé-

ment": soit $g \in \mathcal{D}(B, \text{Lim}F)$. En passant par le haut, on a $F(h) \circ f_x \circ g$, et en passant par le bas on a simplement $f_y \circ g$. Mais si on se rappelle de la définition de $\mathcal{D}/F$, on a que $F(h) \circ f_x = f_y$, de sorte que les deux compositions sont bien égales, et donc le diagramme commute !

En fait tout cela est évident si on remarque plus bêtement que ce qu'on a fait nous donne un foncteur $\mathcal{D}(B, -) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$: c'est facile à vérifier, et c'est laissé en exercice. On obtient alors un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ en le composant avec $F : \mathcal{D}(B, -) \circ F$, noté $\mathcal{D}(B, F(-))$.

Soit maintenant E un ensemble muni d'applications $h_x : E \rightarrow \mathcal{D}(B, F(x))$ qui font de $(E, (h_x)_{x \in X})$ un objet de $\mathbf{Set}/\mathcal{D}(B, F(-))$. On veut en déduire une application $E \rightarrow \mathcal{D}(B, \text{Lim}F)$. Soit $e \in E$. Alors $h_x(e) : B \rightarrow F(x)$. On pose $g_x = h_x(e)$, montrons que $(B, (g_x)_{x \in X})$ est un élément de $\mathcal{D}/F$. Soit $w : x \rightarrow y$ une $\mathcal{C}$ -flèche, on veut vérifier que $F(w) \circ g_x = g_y$. Mais $F(x) \circ g_x = F(w) \circ h_x(e) = \mathcal{D}(B, F(w))(h_x(e)) = \mathcal{D}(B, F(w)) \circ h_x(e) = h_y(e)$ car par hypothèse, $(E, (h_z)_{z \in X})$ est un objet de $\mathbf{Set}/\mathcal{D}(B, F(-))$, donc c'est bon.

Par définition, $(\text{Lim}F, (f_x)_{x \in X})$ étant final dans $\mathcal{D}/F$ on obtient une unique flèche $T(e) : B \rightarrow$

$$\text{Lim}F \text{ faisant commuter tous les } \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{T(e)} & \text{Lim}F \\ & \searrow g_x & \downarrow f_x \\ & & F(x) \end{array}$$

On a ainsi défini $T : E \rightarrow \mathcal{D}(B, \text{Lim}F)$. De plus si $x \in X, e \in E, \mathcal{D}(B, f_x) \circ T(e) = \mathcal{D}(B, f_x)(T(e)) = f_x \circ T(e) = g_x = h_x(e)$, donc $\mathcal{D}(B, f_x) \circ T = h_x$, ce qui montre que le diagramme voulu commute, de sorte que $T : (E, (h_x)_{x \in X}) \rightarrow (\mathcal{D}(B, \text{Lim}F), (\mathcal{D}(B, f_x))_{x \in X})$ est une $\mathbf{Set}/\mathcal{D}(B, F(-))$ -flèche.

Si on a une quelconque autre telle flèche T' , elle vérifie aussi l'équation $\mathcal{D}(B, f_x) \circ T' = h_x$, de sorte qu'en évaluant en e , $f_x \circ T'(e) = g_x$. Mais $T(e)$ était l'unique flèche satisfaisant ça pour tout x , donc $T(e) = T'(e)$ et donc, comme ceci vaut pour tout e , $T = T'$.

Ce qu'on vient de montrer, c'est que $\mathcal{D}(B, \text{Lim}F)$ est un objet final dans $\mathbf{Set}/\mathcal{D}(B, F(-))$, autrement dit une limite de $\mathcal{D}(B, F(-))$. En abrégé, on écrit $\mathcal{D}(B, \text{Lim}F) \cong \text{Lim}\mathcal{D}(B, F(-))$.

Ceci explique en particulier pourquoi si A, B ont un produit (P, π_1, π_2) , pour tout objet C , $\mathcal{D}(C, P) \cong \mathcal{D}(C, A) \times \mathcal{D}(C, B)$. En effet dans ce cas $\mathcal{D}(C, F(-))$ est un foncteur $\mathbf{2} \rightarrow \mathbf{Set}$ donc sa limite est simplement un produit.

Certains auteurs démontrent que dans $\mathbf{Set}$ tout foncteur (de domaine une petite catégorie) admet une limite (au sens qu'on vient de décrire), et utilisent cet isomorphisme ("naturel en B ", on expliquera après ce que cela signifie) pour définir la notion de limite dans une catégorie quelconque.

En fait il s'avère que la notion de limite n'est pas suffisante, en tout cas première analyse, à formaliser la notion de propriété universelle, même si elle suffit dans les cas de base comme le produit, le coproduit etc.; il faut quelque chose d'autre et c'est notre dernier calcul qui va nous guider vers la bonne solution. Ce qui précède était une motivation pour les définitions qui suivent. Pour cela on introduit d'abord la notion de catégorie opposée : soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On note $\mathcal{C}^{op}$ la catégorie qui est exactement comme $\mathcal{C}$, sauf que les fonctions s et t ont été interchangées, i.e. $\mathcal{C}^{op}(A, B) = \mathcal{C}(B, A)$, et en conséquence la composition dans $\mathcal{C}^{op}$, notée $\circ^{op}$, est définie par $g \circ^{op} f = f \circ g$. Il est facile de voir que c'est bien une catégorie. Un foncteur $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$ est alors comme un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, sauf qu'il "inverse les flèches". On dit que c'est un "foncteur contravariant $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ".

En particulier, si $f : A \rightarrow B$, alors $\mathcal{C}(f, C) : \mathcal{C}(B, C) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$ définie par $g \mapsto g \circ f$ donne un foncteur contravariant $\mathcal{C}(-, C) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$.

En admettant que dans $\mathbf{Set}$, les foncteurs à domaine petit ont des limites, cela permet donc de définir, pour $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ le foncteur contravariant $B \mapsto \text{Lim}\mathcal{D}(B, F(-))$ (la définition de ce foncteur sur les flèches est claire/laissée en exercice). Le calcul qu'on a fait montre que si F admet une limite, ce foncteur contravariant "ressemble" à un foncteur contravariant de la forme $\mathcal{D}(-, C)$ pour un certain C . Notre travail va maintenant être de définir plus précisément ce qu'on entend par "ressemble" et d'obtenir ainsi notre définition de propriété universelle.

Revenons aux foncteurs covariants (les vrais foncteurs). On a vu que si A était un objet de $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}(A, -)$ était un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$. Quel rapport entretient-il avec A ? Par exemple si on a une flèche $f : B \rightarrow A$, que peut-on dire entre $\mathcal{C}(A, -)$ et $\mathcal{C}(B, -)$? Pour chaque objet C , on a alors une flèche $\theta_C : \mathcal{C}(A, C) \rightarrow \mathcal{C}(B, C)$ qui, à g associe $g \circ f$. Si on a une flèche $m : C \rightarrow D$,

que dire du diagramme suivant, qui apparaît naturellement : $\mathcal{C}(A, C) \xrightarrow{\theta_C} \mathcal{C}(B, C)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A, C) & \xrightarrow{\theta_C} & \mathcal{C}(B, C) \\ \downarrow \mathcal{C}(A, m) & & \downarrow \mathcal{C}(B, m) \\ \mathcal{C}(A, D) & \xrightarrow{\theta_D} & \mathcal{C}(B, D) \end{array}$$

Si on part de $g : A \rightarrow C$, en suivant la flèche à droite on obtient $m \circ (g \circ f)$, et si on suit la flèche vers le bas, on obtient $(m \circ g) \circ f$. Comme $\mathcal{C}$ est une catégorie, on en déduit que ce diagramme commute. Ceci motive la définition :

Définition : Soit $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs. Une *transformation naturelle* $\theta : F \Rightarrow G$ [on aurait pu noter $\theta : F \rightarrow G$ et certains le font, mais une autre convention consiste à mettre une double flèche] est une collection de flèches indexée par les objets C de $\mathcal{C}$, $\theta_C : F(C) \rightarrow G(C)$ telle que pour toute $\mathcal{C}$ -flèche $m : C \rightarrow D$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{\theta_C} & G(C) \\ \downarrow F(m) & & \downarrow G(m) \\ F(D) & \xrightarrow{\theta_D} & G(D) \end{array}$$

Les transformations naturelles se composent naturellement, composante par composante (c'est la composition dite "verticale").

Une transformation naturelle θ telle que pour tout C , θ_C soit un isomorphisme est appelée isomorphisme naturel. Une telle transformation admet alors un inverse θ^{-1} définie par $(\theta^{-1})_C = \theta_C^{-1}$ (qui est clairement une transformation naturelle), et correspond dans la plupart des cas à ce que les gens entendent lorsqu'ils disent "isomorphisme canonique".

Deux foncteurs sont dits naturellement isomorphes s'il existe un isomorphisme naturel entre eux. Ce qu'on entendait par "ressemble" était en fait "est naturellement isomorphe à". Avec les notations d'avant, on peut en fait montrer que F admet une limite si et seulement si le foncteur $\text{Lim}_c \mathcal{D}(-, F(c))$ (où on a mis un indice seulement pour indiquer que la limite portait sur le deuxième terme) est naturellement isomorphe à un foncteur de la forme $\mathcal{D}(-, C)$, et dans ce cas, $\text{Lim} F \cong C$; on ne le fera pas ici. Mais cela nous amène à une définition importante :

Définition : Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ est représentable s'il est naturellement isomorphe à un foncteur $\mathcal{C}(A, -)$ pour un certain objet A .

Un foncteur contravariant $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ (qui est en fait un foncteur $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$) est donc représentable si et seulement s'il est naturellement isomorphe à un foncteur de la forme $\mathcal{C}(-, A)$.

Soit F un foncteur représentable et $\theta : \mathcal{C}(A, -) \Rightarrow F$ un isomorphisme naturel. Soit de plus $f : A \rightarrow B$ une flèche. On a alors le carré commutatif : $\mathcal{C}(A, A) \xrightarrow{\theta_A} F(A)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A, A) & \xrightarrow{\theta_A} & F(A) \\ \downarrow \mathcal{C}(A, f) & & \downarrow F(f) \\ \mathcal{C}(A, B) & \xrightarrow{\theta_B} & F(B) \end{array}$$

En suivant l'image de id_A , on obtient $F(f) \circ \theta_A(id_A) = \theta_B \circ \mathcal{C}(A, f)(id_A) = \theta_B(\mathcal{C}(A, f)(id_A)) = \theta_B(f)$. Ainsi $\theta_B(f) = F(f)(a)$ pour $a = \theta_A(id_A)$ (qui ne dépend ni de B ni de f); cela détermine entièrement θ . Réciproquement, la donnée d'un objet A et d'un élément a de $F(A)$ détermine une transformation naturelle $\theta : \mathcal{C}(A, -) \Rightarrow F$ (il s'agit d'un cas particulier du lemme de Yoneda), en décrétant que $\theta_B(f) = F(f)(a)$ (on vérifie facilement que cela produit bien une transformation naturelle).

La paire (A, a) détermine donc F lorsqu'il est représentable. On peut à nouveau démontrer l'unicité des objets vérifiant les propriétés en question avec ce formalisme-ci: supposons que (A, a) et (B, b) représentent le même foncteur F . Soit $\theta : \mathcal{C}(A, -) \Rightarrow F$ l'isomorphisme naturel associé à a , $\phi : \mathcal{C}(B, -) \Rightarrow F$ celui associé à b , et ϕ^{-1} l'isomorphisme réciproque. Alors $\delta = \phi^{-1} \circ \theta : \mathcal{C}(A, -) \Rightarrow \mathcal{C}(B, -)$ est un isomorphisme naturel.

On applique ce qui précède à δ et δ^{-1} pour obtenir $f \in \mathcal{C}(B, A)$ et $g \in \mathcal{C}(A, B)$ tels que $\delta_C(m) = \mathcal{C}(B, m)(f) = m \circ f$ et $\delta_C^{-1}(m) = \mathcal{C}(A, m)(g) = m \circ g$ pour tout m tel que cela a un sens. Mais $\delta_C(m) = \phi_C^{-1} \circ \theta_C(m) = \phi_C^{-1}(F(m)(a))$ donc $\phi_C(m \circ f) = F(m)(a)$ donc $F(m \circ f)(b) = F(m)(a)$, $F(m)(F(f)(b)) = F(m)(a)$, ceci pour tout m , de sorte que $F(f)(b) = a$, et de même, $F(g)(a) = b$. Ainsi $F(g \circ f)(b) = b$. Mais $F(id_B)(b) = b$ et $(f \mapsto F(f)(b)) = \phi_B$ est injective, donc $g \circ f = id_B$. De même, $f \circ g = id_A$, de sorte que f, g sont des isomorphismes

réciroques, et $F(g)(a) = b$. g est clairement le seul isomorphisme à satisfaire ça (θ_B est injective) et donc on a la propriété suivante : si (A, a) et (B, b) représentent le même foncteur F , alors il existe un unique isomorphisme $f : A \rightarrow B$ tel que $F(f)(a) = b$. C'est notre propriété d'unicité : on a à la fois un isomorphisme entre les différents représentants, mais cet isomorphisme est unique si on ajoute la condition qu'il doit respecter la structure de représentant. C'est cette unicité de l'isomorphisme qu'on a mentionné dans les sections précédentes (3.1, 3.2 et 3.3)

Comme pour les limites, on peut ne garder que A mais on perd un peu d'information. Il est clair qu'on peut faire les mêmes raisonnements pour F contrvariant, puisqu'il s'agit simplement de les faire dans $\mathcal{C}^{op}$, et qu'un isomorphisme dans cette dernière catégorie n'est rien de plus qu'un isomorphisme dans $\mathcal{C}$. Ainsi on a la nouvelle (et dernière) définition de propriété universelle, qui englobe les exemples précédents :

Une propriété universelle est un foncteur $F : \mathcal{C}^{(op)} \rightarrow \mathbf{Set}$, et un couple (A, a) (où $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ et $a \in F(A)$) la satisfait si et seulement si la transformation naturelle $\theta : \mathcal{C}(A, -) \Rightarrow F$ (ou $\mathcal{C}(-, A) \Rightarrow F$) induite par a est un isomorphisme naturel (remarquons que cette définition pourrait motiver la définition de la catégorie, notée $\int_{\mathcal{C}} F$ dite des "éléments de F " des couples (A, a) avec $a \in F(A)$). Etudier cette catégorie permet d'étudier F , et elle donne un critère de représentabilité ; qui permet de prouver des théorèmes forts, comme le fait que toute variété - au sens de l'algèbre universelle - est cocomplète)

Les exemples traités dans la première section peuvent être retranscrits en termes de limites, et donc en termes de représentabilité ; le soin est laissé aux lectrices de faire les vérifications pour s'en rendre compte (ici les limites sont simples à calculer dans $\mathbf{Set}$).

On donne donc d'autres exemples qui montrent que cette définition est meilleure que la simple avec les limites. Ces exemples sont en majorité (sauf le dernier) tirés de la présentation de l'année précédente ; il s'agit des exemples du produit tensoriel d'espaces vectoriels (en fait on peut le faire avec des R -modules), de l'algèbre libre sur X (où "algèbre" est à prendre au sens de l'algèbre universelle ; on traitera par exemple du cas des groupes), et de la représentation induite. Ces trois exemples sont en fait des cas particuliers d'un phénomène plus fort, à savoir celui d'adjonction, qui dépasse malheureusement le cadre de ce projet, et qu'on ne détaillera donc pas.

Soit donc R un anneau commutatif et $R\text{-}\mathbf{Mod}$ la catégorie des R -modules. On notera $Hom(A, B)$ au lieu de $(R\text{-}\mathbf{Mod})(A, B)$. Si M, N sont deux R -modules, on a un foncteur naturellement associé qui est $Hom(M, Hom(N, -))$ (où le Hom le plus interne est en fait vu comme un endofoncteur), $R\text{-}\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$. On peut le voir aussi comme $Bil(M, N; -)$, l'ensemble des applications R -bilinéaires $M \times N \rightarrow A$: on vérifie facilement que les deux sont naturellement isomorphes. Un représentant de ce foncteur est précisément un produit tensoriel $M \otimes_R N$ muni d'une application bilinéaire $f : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$. Les vérifications sont laissées en exercice (c'est la naturalité qui fait qu'on retrouve les diagrammes vus en cours).

Ce qu'on s'appête à expliquer pour les groupes peut être fait pour tout type d'algèbres définissables par des équations : anneaux, monoïdes, algèbres de Boole, etc. (pas les corps par contre). Soit X un ensemble. On considère sur la catégorie $\mathbf{Grp}$ le foncteur $G \mapsto \mathbf{Set}(X, U(G))$, c'est-à-dire $\mathbf{Set}(X, U(-))$ où $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ est le foncteur dit d'oubli, qui à un groupe associe son ensemble sous-jacent. Un représentant de ce foncteur est un groupe $F(X)$ muni d'une application $j : X \rightarrow F(X)$ tel que $\mathbf{Set}(X, U(G)) \cong Hom(F(X), G)$, naturellement en G : il s'agit précisément du groupe libre sur X (en fait c'est aussi naturel en X , et on est ici en présence d'une adjonction ; mais cela dépasse le cadre de cette présentation).

Remarquons au passage que le foncteur U est aussi une propriété universelle, et on peut donc se poser la question de savoir si quelqu'un la satisfait. Il s'avère que oui, et à nouveau c'est le cas pour tous les types d'algèbres. En effet, dans $\mathbf{Set}$, le foncteur $\text{Id}_{\mathbf{Set}}$ (identité sur les objets et les applications) est naturellement isomorphe au foncteur $\mathbf{Set}(\{0\}, -)$. En composant les isomorphismes naturels avec U , on en déduit que U est naturellement isomorphe à $\mathbf{Set}(\{0\}, U(-))$ et donc (par ce qui précède) à $\mathbf{Grp}(\mathbb{F}_1, -)$ où $\mathbb{F}_1 := F(\{0\})$ désigne le groupe libre sur un générateur, i.e. $\mathbb{Z}$. Donc U est naturellement isomorphe à $\mathbf{Grp}(\mathbb{Z}, -)$, et c'est totalement normal : U recense les éléments de G , et un morphisme $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$ correspond précisément à un tel élément : prendre $f(1)$!

On va finalement parler des représentations induites. Etant donné un groupe fini G , un sous-groupe H et un corps k , on a une manière naturelle de passer d'une k -représentation de G à une

k -représentation de H : si $\rho : G \rightarrow GL(V)$ est un morphisme de groupes, alors $\rho|_H : H \rightarrow GL(V)$ en est aussi un. La notion de représentation induite est là pour permettre un passage inverse: aller de $\pi : H \rightarrow GL(V)$ vers $G \rightarrow GL(V)$. Malheureusement, on ne peut pas vraiment aller vers $GL(V)$ mais on se contente de $GL(W)$ pour un espace W "assez proche de V ". On veut aussi que ce passage se passe bien, par exemple on ne veut pas simplement associer la représentation triviale à chaque fois, ou la représentation régulière: la représentation associée à π doit avoir de bonnes propriétés pour que la notion soit intéressante. On a vu en cours/TD différentes manières d'associer une représentation de G à une de H ; mais à chaque fois elles satisfiaient la relation dite "réciprocité de Frobenius": $Hom_G(\text{Ind}_H^G \pi, \rho) \simeq Hom_H(\pi, \rho|_H)$. Une question naturelle est de se demander si les différentes manières de définir la représentation induite sont équivalentes, et il s'avère que oui: on peut le prouver directement, ou trivialement grâce à la réciprocité de Frobenius. Le.a catégoricien.ne affuté.e aura reconnu une adjonction, et le.a lecteurice de cette présentation aura peut-être déjà reconnu une propriété universelle. On la décrit rapidement pour conclure la présentation.

On fixe le corps k . Pour un groupe K , $\mathbf{Rep}_K$ est la catégorie dont les objets sont les k -représentations de K , et dont les flèches sont les "opérateurs d'entrelacement" (mieux connus sous le nom sobre de "morphisms de représentations"). On vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une catégorie.

Alors si $H < G$ est un sous-groupe, on a foncteur $\text{Res}_H^G : \mathbf{Rep}_G \rightarrow \mathbf{Rep}_H$ qui associe à chaque représentation sa restriction à H , et agit de la manière naturelle sur les flèches. Fixons une représentation $\pi : H \rightarrow GL(V)$. On a alors un foncteur naturel $F : \mathbf{Rep}_G \rightarrow \mathbf{Set}$ défini comme la composition de $\mathbf{Rep}_H(\pi, -)$ et de Res_H^G . Ce foncteur est donc une propriété universelle, et un représentant en est donc unique. Ainsi, si $\text{Ind}_1 \pi, \text{Ind}_2 \pi$ sont deux représentations de G vérifiant la réciprocité de Frobenius (naturellement en ρ), alors $\text{Ind}_1 \pi \simeq \text{Ind}_2 \pi$: cela permet de conclure que les différentes versions vues en cours sont équivalentes (en fait avec à peine plus de travail, on peut voir que $\text{Ind}_1 \pi, \text{Ind}_2 \pi : \mathbf{Rep}_H \rightarrow \mathbf{Rep}_G$ sont naturellement isomorphes, en tant que foncteurs donc).

5 Bibliographie, Références

- [1] *An Introduction to Category Theory*, Harold Simmons, Cambridge University Press
- [2] *Categories for the Working Mathematician*, Saunders Mac Lane, Graduate Texts in Mathematics, Springer
- [3] *Abstract and Concrete Categories - The Joy of Cats*, Jiri Adamek, Horst Herrlich, George E. Strecker, Dover
- [4] *Homotopy is not concrete*, Peter Freyd, Springer Lecture Notes in Mathematics
- [5] *Set theory for category theory*, Michael Shulman, available on arxiv.org