

# Thé du DMA, l'infini-groupeïde fondamental d'un espace

Maxime

1 Avril 2020

## 1 Définition

Soit  $X$  un espace topologique. Si on fixe un point  $x$ , on peut définir le groupe fondamental  $\pi_1(X, x)$  : c'est l'ensemble des lacets basés en  $x$ , modulo la relation d'homotopie entre lacets.

Une première chose qu'on peut faire pour rendre cette définition plus naturelle, c'est d'enlever la dépendance en  $x$  : on obtient le groupeïde fondamental  $\Pi_1(X)$  : c'est une catégorie, dont les objets sont les points de  $X$ , et une flèche  $x \rightarrow y$  est une classe d'homotopie de chemins de  $x$  vers  $y$ . Il est alors clair (ce sont les mêmes preuves que pour le groupe fondamental) qu'on peut composer ces chemins en suivant l'un puis l'autre, que le chemin constant en  $x$  agit comme une identité, et qu'on peut inverser tous les chemins.

On a donc une catégorie dont toutes les flèches sont inversibles, c'est-à-dire un groupeïde.

Deux remarques peuvent nous faire passer à l'infini-groupeïde fondamental :

**Remarques 1.** - *En homotopie, on n'aime pas quotienter : on préfère rajouter des données (par exemple des isomorphismes) qui indiquent que deux objets sont identifiés. Cela mène à des constructions plus pertinentes homotopiquement.*  
-  $\Pi_1(X)$  contient des informations homotopiques "de dimension 1" uniquement sur  $X$  - on pourrait avoir envie d'avoir un gadget similaire pour les dimensions supérieures

Pour ces deux raisons, on peut commencer par prendre comme flèches les chemins entre  $x$  et  $y$  et des flèches entre ces flèches qui seraient des homotopies. Seulement ces homotopies ne se composent pas elles-mêmes associativement, donc il faut rajouter des homotopies entre homotopies, et ainsi de suite. On arrive à ce qu'on a envie d'appeler  $\infty$ -groupeïde fondamental de  $X$ .

Concrètement, pour définir ça on utilise la notion d'ensemble simplicial :

**Définition 1.** Soit  $X$  un espace topologique.  $\pi_\infty(X)$  est l'ensemble simplicial défini par  $\text{hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta^\bullet|, X)$

En degré 0, on a donc  $\text{hom}_{\mathbf{Top}}(*, X)$ , donc les points de  $X$ , en degré un, les applications continues  $|\Delta^1| \rightarrow X$ , donc des chemins dans  $X$ . En degré 2, on a

les applications continues  $|\Delta^2| \rightarrow X$  - si on voit  $|\Delta^2|$  comme un triangle orienté, de sommets 0, 1, 2 et de bords 01, 02, 12, on peut voir une telle application continue comme une homotopie de 02 vers les composition 01 \* 12. Si on prend par exemple une application continue qui est constante sur le bord 12, on peut directement voir ça comme une homotopie entre 02 et 01 : c'est bien ce qu'on voulait encoder.

En dimension supérieure, on a des interprétations similaires.

## 2 Exemple

A priori, l'ensemble simplicial qu'on a décrit plus haut est très compliqué (en degré  $n$ , on a *toutes* les applications continues  $|\Delta^n| \rightarrow X$ , imaginez par exemple pour  $\mathbb{R}^2$  !). Mais on peut essayer de trouver des  $\infty$ -groupoïdes plus simples à décrire qui sont homotopiquement équivalents.

Pour le cercle  $S^1$ , on a un ensemble simplicial *faiblement* équivalent qui a juste deux simplexes non dégénérés : un point, et un segment (dont les deux extrémités sont le même point). Il ne forme pas un  $\infty$ -groupoïde (on ne peut pas composer ces flèches !); mais le plus petit  $\infty$ -groupoïde qui est (fortement) équivalent à  $\pi_\infty(S^1)$  peut-être décrit de la manière suivante : l'ensemble de ses  $n$ -simplexes est  $\mathbb{Z}^n$ , ses dégénérescences ajoutent un 0 dans la position souhaitée, et ses faces font  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$  pour un  $i$  au milieu, et  $d_0(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n)$ ,  $d_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1})$ .

Si on regarde les petites dimensions : en degré 0, on n'a qu'un seul point (c'est le "point base" si on veut); en degré 1 on a tout  $\mathbb{Z}$  : ça correspond aux chemins dans  $S^1$  qui correspondent à faire un nombre entier de fois le tour du cercle (or vous savez que  $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ , donc on a "tous les chemins"); en degré 2 on a  $\mathbb{Z}^2$  - à quoi correspond le triangle  $(m, n)$  ? Ses faces sont 01 :  $m$ , 12 :  $n$ , 02 :  $m + n$ , si on reprend notre interprétation plus tôt, ce triangle correspond à une homotopie entre  $m + n$  et la composition de  $m$  et  $n$ , comme on l'attendrait !

En dimensions supérieures, on va simplement retrouver des homotopies qui assurent la cohérence des homotopies qu'on vient de trouver. On appelle cet  $\infty$ -groupoïde  $B\mathbb{Z}$ , et on a  $\pi_\infty(S^1) \simeq B\mathbb{Z}$

## 3 Théorème

L' $\infty$ -groupoïde d'un espace contient des informations homotopiques de toutes dimensions, contrairement au groupoïde fondamental. On peut se demander combien d'information il garde. Manifestement, si deux espaces sont homotopiquement équivalents (en fait, même faiblement), ils ont des  $\infty$ -groupoïdes homotopiquement équivalents. Si on ne veut pas utiliser de mots trop compliqués, on ne peut donc pas espérer mieux que:

**Théorème 1.** *Le foncteur  $\pi_\infty$  de la catégorie des CW-complexes vers la catégorie des  $\infty$ -groupoïdes est surjectif à équivalence d'homotopie près, et induit des*

*bijections  $[X, Y] \rightarrow [\pi_\infty(X), \pi_\infty(Y)]$  sur les classes d'homotopie de morphismes (applications continues entre CW-complexes, et morphismes d' $\infty$ -groupoïdes)*

C'est une version (faible) de l'hypothèse homotopique de Grothendieck.