Opérations de Steenrod motiviques

Joël Riou

23 mai 2012

Table des matières

1 Isomorphisme de Thom relatif **3**
1.1 Le changement de base pour $c_{\mathrm{equi}}(X/S, 0)$ avec S régulier . . . 4
1.2 La catégorie $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)$ pour un schéma régulier S . . . 5
1.3 L'adjonction entre $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)$ et $\mathcal{H}_{\bullet}(S)$ . . . 9
1.4 La fonctorialité élémentaire de la catégorie $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)$ . . . 12
1.5 Isomorphisme de Thom relatif . . . 13
1.6 Classes tautologiques . . . 13

2 Construction de l'opération totale **15**
2.1 Construction de l'opération . . . 15
2.2 Raffinement de l'opération totale . . . 17
2.3 Compatibilité au changement de base . . . 19
2.4 Compatibilité aux classes de Thom . . . 21
2.5 Indépendance en le fibré E . . . 21

3 Propriétés de l'opération totale **22**
3.1 Fonctorialité en U et en G . . . 23
3.2 Compatibilité à la multiplication . . . 24
3.3 Action sur les classes de Thom . . . 24
3.4 Cas du classifiant $\mathbf{B}_{\text{ét}}G$ . . . 25
3.5 Théorème de symétrie . . . 27
3.6 Annulation du Bockstein . . . 30
3.7 Comparaison avec la construction de Voevodsky . . . 34

4 Opérations de Steenrod **34**
4.1 Le motif de $\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_{\ell}$ . . . 34
4.2 Construction des opérations P^i et B^i sur $\widetilde{H}^{2\star,\star}$ . . . 38
4.3 Les opérations stables P^i et B^i . . . 38
4.4 Premières propriétés . . . 39
4.5 Relations d'Adem . . . 40

5 L'algèbre de Steenrod et sa duale **42**
5.1 L'algèbre $A^{\star,\star}$ et la comultiplication $\Psi^{\star}$ . . . 42
5.2 L'algèbre duale $A_{\star,\star}$ . . . 46
5.3 La comultiplication $\Psi_{\star}$ sur $A_{\star,\star}$ . . . 50
5.4 La base de Milnor . . . 52
5.5 Action sur les classes de Chern et les classes de Thom . . . 56

6 Endomorphismes du spectre représentant la cohomologie motivique **58**

Cet article se veut avant tout un texte donnant une construction solide des opérations de Steenrod agissant sur la cohomologie motivique modulo ℓ des variétés lisses ou plus généralement des objets de la catégorie homotopique $\mathcal{H}(k)$ de Morel-Voevodsky associée à un corps parfait de caractéristique différente de ℓ.

Les énoncés seront essentiellement ceux de [17]. Si les principes généraux de [17] sont évidemment corrects, un certain nombre de détails en sont imparfaitement rédigés et surtout il semble qu'à quelques endroits il faille utiliser des arguments substantiellement différents. Vu l'importance des résultats obtenus en utilisant les opérations de Steenrod motiviques (conjecture de Milnor [16], conjecture de Bloch-Kato [20]), il paraissait important d'y remédier. Il a semblé préférable de rédiger le présent article comme un ensemble cohérent plutôt que comme une liste d'*errata* à [17]. Cet article couvre l'essentiel du sujet traité dans [17], à deux exceptions près pour lesquelles nous ferons référence à [17] : l'annulation de P^i pour $i < 0$ [17, Proposition 3.6] et la formule $u^2 = \tau v + \rho u$ dans la cohomologie modulo 2 du classifiant de μ_2 [17, Theorem 6.10]. Pour le reste, le présent article pourra se lire indépendamment de [17].

Le point-clef de la construction des opérations de Steenrod motiviques réside dans la définition d'une transformation naturelle pour tous $r \geq 0$ et $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(k)$:

$$H^{2r,r}(\mathcal{X}) \to H^{2rn,rn}(\mathcal{X} \times (G\backslash U)) ,$$

une telle opération étant associée à un k-schéma lisse U sur lequel agit librement un sous-groupe G du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. La principale idée nouvelle développée dans cet article est de ne pas considérer que la donnée est celle de $U \in Sm/k$ muni d'une action libre de G, mais de considérer un schéma $S \in Sm/k$ muni d'un G-torseur étale U (ainsi $G\backslash U = S$). Toutes les constructions seront alors relatives au schéma de base S et en particulier la transformation naturelle cherchée peut se réinterpréter comme une morphisme $K_r \to K_{rn}$ dans la catégorie homotopique pointée $\mathcal{H}_\bullet(S)$ au-dessus de S où les espaces K_i sont les espaces d'Eilenberg-Mac Lane motiviques représentant la cohomologie motivique en bidegré $(2i, i)$.

À vrai dire, en tant que préfaisceau d'ensembles pointés, l'espace d'arrivée ne sera pas exactement K_{rn}, mais une version tordue de celui-ci. Plus précisément, à chaque fibré vectoriel E sur S est associé un préfaisceau K_E sur Sm/S dont le type d'homotopie ne dépend que du rang de E. C'est un isomorphisme de Thom relatif qui fait l'objet de la section 1. Par ailleurs, à une action du groupe fini G sur un ensemble fini A de cardinal n est associée *via* le G-torseur étale U un fibré vectoriel ξ de rang n sur S. À ces données, nous associerons dans la section 2 un morphisme de préfaisceaux $K_r \to K_{\xi^r}$, ce qui donnera lieu à l'opération cohomologique annoncée plus haut. Une partie de l'intérêt est qu'en fait, à tout fibré vectoriel E sur S est associée un morphisme $K_E \to K_{E\otimes\xi}$ dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$, le cas précédent étant celui où E est le fibré trivial de rang r sur S. Il faut penser à cette opération comme à l'« élévation à la puissance n tordue par le G-torseur U ». Si on dispose d'un autre groupe fini G', d'un G'-ensemble A', un G'-torseur étale U' donnant lieu à un autre fibré vectoriel ξ' sur S, il devient alors loisible de composer l'opération associée à A et celle associée à A' :

$$K_E \to K_{E\otimes\xi} \to K_{E\otimes\xi\otimes\xi'} .$$

Le morphisme composé correspondra à la construction associée au $(G \times G')$-ensemble produit $A \times A'$ et au $(G \times G')$-torseur $U \times_S U'$ (cf. proposition 2.1.5). Cette observation nous permettra de réinterpréter le théorème de symétrie (3.5.1) ayant pour conséquence les relations d'Adem (§4.5). Les relations d'Adem modulo 2 données dans [17, Theorem 10.2] comportaient quelques erreurs ; elles seront corrigées dans le théorème 4.5.1.

Les propriétés générales des opérations totales $H^{2r,r}(\mathcal{X}) \to H^{2rn,rn}(\mathcal{X} \times (G\backslash U))$ pour $X \in \mathcal{H}(k)$ avec k un corps parfait seront étudiées dans la section 3. Le paragraphe §3.7 fera le lien avec la construction de Voevodsky et expliquera en quoi le fait qu'elle soit bien définie était incorrectement justifié dans [17]. Il est tentant de penser que cette erreur provenait d'une contrainte d'écriture consistant à n'utiliser d'autre catégorie homotopique $\mathcal{H}(S)$ que celle du corps de base k. L'utilisation des catégories $\mathcal{H}(S)$ pour $S \in Sm/k$ permet de mieux saisir ce qui est véritablement important. Cela sera également utile dans le §3.6 où nous montrerons l'annulation du Bockstein évalué sur l'opération modulo ℓ associée au groupe symétrique $\mathfrak{S}_\ell$. La démonstration de ce fait était incorrecte dans [17]. Nous montrerons qu'il est possible de le montrer en suivant d'assez près les arguments originaux de Steenrod [14].

Dans la section 4, nous définissons les opérations de Steenrod proprement dites P^i et B^i qui sont des opérations cohomologiques stables de bidegrés respectifs $(2i(\ell-1), i(\ell-1))$ et $(2i(\ell-1)+1, i(\ell-1))$. Certains énoncés concernant les classifiants de μ_ℓ et $\mathfrak{S}_\ell$ ont été formulés en utilisant le langage des motifs plutôt que celui de la cohomologie motivique utilisé dans [17]. On s'exonère en effet ici de ce qui semble avoir été une autre contrainte d'écriture pour Voevodsky : ne pas utiliser les catégories triangulées de motifs comme $DM_-^{\mathrm{eff}}(k)$ et *a fortiori* les catégories $DM_{\leq 0}^{\mathrm{eff}}(S)$ que nous utilisons dans la section 1. Nous donnerons deux démonstrations d'une formule-clef (cf. proposition 4.4.5) décrivant l'action des opérations de Steenrod sur les classes de Chern de fibrés en droites.

Dans la section 5, nous étudions l'algèbre de Steenrod $A^{\star,\star}$ engendrée par les opérations de Steenrod, ainsi que sa duale $A_{\star,\star}$. Si quelques arguments ont été précisés par rapport à [17], la présentation que nous avons choisie met l'accent de façon peut-être plus systématique sur les différentes structures utilisées. J'espère que la tâche du lecteur en sera facilitée.

Enfin, dans la section 6, on obtient un résultat « nouveau » exprimant que le spectre $\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell}$ représentant la cohomologie motivique modulo ℓ n'admet pas d'endomorphisme stablement fantôme non nul dans la catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}(k)$, quand k est un corps de caractéristique zéro. Ceci utilise de façon essentielle le théorème principal de [18] qui énonce qu'à opérations stablement fantômes près, l'anneau bigradué des endomorphismes du spectre $\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell}$ s'identifie à $A^{\star,\star}$. Grâce à ce résultat, on peut maintenant identifier $A^{\star,\star}$ à l'anneau des endomorphismes de $\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell}$.

Je remercie Denis-Charles Cisinski, Frédéric Déglise et Jörg Wildeshaus de m'avoir donné l'occasion d'approfondir ce sujet en me demandant de faire un cours sur les opérations de Steenrod lors de l'école d'été *Motives and Milnor conjecture* à l'Institut de Mathématiques de Jussieu en juin 2011. Je remercie aussi Vladimir Voevodsky d'avoir répondu à certaines de mes questions.

1 Isomorphisme de Thom relatif

Dans ce texte, on supposera implicitement que les schémas sont séparés. Un schéma régulier sera pour nous un schéma noethérien (séparé) dont les anneaux locaux sont réguliers au sens habituel. Si S est un schéma noethérien, la catégorie Sm/S désignera la catégorie des S-schémas lisses (et séparés) de type fini. Une composante irréductible d'un schéma sera toujours munie de la structure de sous-schéma fermé réduit. Le point générique d'un schéma intègre S sera noté η_S. Si S est un schéma et $s \in S$, on note $S_{(s)} = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{S,s}$ le localisé (Zariski) de S en s. L'ensemble des points de codimension i d'un schéma noethérien S est noté $S^{(i)}$.

Définition 1.0.1 *[21, Corollary 3.4.6, Chapter II] Soit S un schéma régulier. Soit Λ un groupe abélien de coefficients. Soit $X \in Sm/S$. On note $c_{equi}(X/S, 0)$ (ou $c_{equi}(X/S, 0)_\Lambda$ s'il y a lieu de préciser le groupe de coefficients) le Λ-module libre sur l'ensemble des sous-schémas fermés intègres Z de X tels que $Z \to S$ soit un morphisme fini et dont l'image (ensembliste) soit une composante connexe de S.*

Définition 1.0.2 *Soit S un schéma régulier. Soit E un fibré vectoriel sur S de rang r. On note $K\widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, E)$ le préfaisceau d'ensembles pointés sur Sm/S qui à $U \in Sm/S$ associe le Λ-module quotient*

$$c_{equi}(U \times_S E/U, 0)/c_{equi}(U \times_S (E - \{0\})/U, 0)$$

où $E - \{0\}$ est le fibré vectoriel épointé, c'est-à-dire le complémentaire de la section nulle de E. On rappellera dans le §1.1 comment est définie la structure de préfaisceau.

Si S est lisse sur un corps parfait, la cohomologie motivique en bidegré $(2r, r)$ est représentée dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$ par $K\widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, \mathbf{A}^r)$ (pour ainsi dire par définition). Un des buts principaux de cette section est de montrer qu'au-dessus d'une telle base, $K\widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, E)$ ne dépend que du rang du fibré vectoriel E. On obtiendra ainsi différents préfaisceaux représentant la cohomologie motivique et on les utilisera dans la construction des opérations de Steenrod.

1.1 Le changement de base pour $c_{\mathbf{equi}}(X/S,0)$ avec S régulier

Définition 1.1.1 *Soit X un schéma noethérien. On note $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X)$ la catégorie dérivée bornée de la catégorie abélienne des faisceaux cohérents sur X. Soit Z un fermé de X. On note $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X)_Z$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X)$ formée des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont supportés par Z. Soit C une composante irréductible de Z dont on note $\eta = \eta_C$ le point générique. Le foncteur de restriction $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X)_Z \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X_{(\eta)})_\eta$ induit après passage aux groupes de Grothendieck une application $K(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X)_Z) \to K(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X_{(\eta)})_\eta) \simeq \mathbf{Z}$ (notée χ_C ou χ_η), l'isomorphisme de droite étant donné par la somme alternée des longueurs des objets de cohomologie.*

Définition 1.1.2 *Soit $T \xrightarrow{f} S$ un morphisme de type fini entre schémas réguliers. Soit $X \in Sm/S$. On pose $X_T = X \times_S T$. On note $f^\star \colon c_{equi}(X/S,0) \to c_{equi}(X_T/T,0)$ le morphisme de groupes abéliens qui à Z (avec $Z \subset X$ un sous-schéma fermé intègre tel que $Z \to S$ soit un morphisme fini et surjectif (au-dessus d'une composante connexe de S) associe*

$$f^\star Z = \sum_{\eta \in (Z \times_S T)^{(0)}} \chi_\eta(\mathscr{O}_Z \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_T) \cdot C$$

Il convient de vérifier que le cycle ainsi défini appartient bien à $c_{\mathrm{equi}}(X_T/T,0)$:

Lemme 1.1.3 *Les notations étant les mêmes que dans la définition précédente, le cycle $f^\star(Z)$ est bien un élément de $c_{equi}(X_T/T,0)$. Plus précisément, pour toute composante irréductible C de $Z \times_S T$ le morphisme de projection $C \to T$ est fini et C se surjecte sur une composante connexe de T.*

On rappelle qu'une fonction de dimension (Zariski) sur un schéma noethérien U est une fonction $\delta \colon U \to \mathbf{Z}$ telle que pour toute spécialisation immédiate (Zariski) $x \rightsquigarrow y$ (c'est-à-dire que x et y sont deux points de U, que y appartient à l'adhérence de x et que l'adhérence du point correspondant à x dans le localisé $X_{(y)}$ est de dimension 1), on a $\delta(y) = \delta(x) - 1$. Sur un schéma noethérien connexe, deux fonctions de dimension diffèrent d'une constante. Si U est régulier, $-\operatorname{codim}$ est une fonction de dimension. Si $V \xrightarrow{f} U$ est un morphisme de type fini, que U est universellement caténaire et que δ_U est une fonction de dimension sur U, alors on peut définir une fonction de dimension δ_V sur V en posant $\delta_V(v) = \delta_U(f(v)) + \operatorname{deg.tr.}(v/f(v))$ où deg. tr. est le degré de transcendance [1]. (En particulier, la restriction d'une fonction de dimension à un sous-schéma est encore une fonction de dimension.)

Démontrons le lemme. On munit S d'une fonction de dimension δ_S. Tout S-schéma de type fini sera muni de la fonction de dimension déduite de δ_S par la règle ci-dessus. La propriété à établir est de nature locale sur S, donc on peut supposer que $f = \pi \circ i$ avec $i \colon T \to S'$ une immersion fermée et $\pi \colon S' \to S$ un morphisme lisse. On peut aussi supposer que S, S' et T sont connexes. On note c la codimension de l'immersion fermée (régulière) i. Notons C une composante irréductible de $Z_T = Z_{S'} \cap X_T$, où l'intersection schématique est prise dans le schéma régulier $X_{S'}$. Notons d' la dimension relative du morphisme lisse $S' \to S$ et C' une composante irréductible de $Z_{S'}$ contenant C. Bien sûr, C est une composante irréductible de l'intersection $C' \cap X_T$ dans $X_{S'}$. En appliquant [13, Théorème 3, §V.B.6] à cette intersection, on obtient :

$$\delta_C(\eta_C) = \delta_{X_{S'}}(\eta_C) \geq \delta_{X_{S'}}(\eta_{C'}) - c = \delta_Z(\eta_Z) + d' - c = \delta_S(\eta_S) + d' - c\,.$$

Par ailleurs, si on note $t \in T$ l'image de η_C par la projection $C \to T$ qui est un morphisme fini, on a :

$$\delta_C(\eta_C) = \delta(t) = \delta_T(\eta_T) - \operatorname{codim}_T t = \delta_S(\eta_S) + d' - c - \operatorname{codim}_T t \leq \delta_S(\eta_S) + d' - c\,.$$

[1] Pour vérifier cette affirmation, on peut se ramener au cas où $V = \mathbf{A}^1_U$ et U est intègre universellement caténaire.

En combinant ces inégalités, on obtient que $\delta_C(\eta_C) = \delta_S(\eta_S) + d' - c$ et que $\operatorname{codim}_T t = 0$, c'est-à-dire que $t = \eta_T$. Autrement dit, le sous-schéma fermé intègre C de $X \times_S T$ définit bien un élément de $c_{\mathrm{equi}}(X_T/T, 0)$.

La proposition suivante montre que la construction du changement de base est fonctorielle :

Proposition 1.1.4 *Considérons un diagramme de deux morphismes de type fini composables $U \xrightarrow{g} T \xrightarrow{f} S$ entre schémas réguliers. Soit $X \in Sm/S$. Alors, on a l'égalité $(f \circ g)^\star = g^\star \circ f^\star \colon c_{equi}(X/S, 0) \to c_{equi}(X_U/U, 0)$.*

Lemme 1.1.5 *Soit $T \xrightarrow{f} S$ un morphisme de type fini entre schémas réguliers. Soit $X \in Sm/S$. Soit Z un sous-schéma fermé de X dont les composantes irréductibles $(Z_i)_{i \in I}$ soient telles que pour tout $i \in I$, $Z_i \to S$ soit un morphisme fini et surjectif au-dessus une composante connexe de S. Alors, pareillement, pour toute composante irréductible C de $Z_T = Z \times_S T$, le morphisme $C \to T$ est fini et surjectif au-dessus d'une composante irréductible de T, et le diagramme suivant commute, où les morphismes verticaux notés χ s'identifient à des sommes de morphismes χ_C pour C parcourant les composantes irréductibles de Z (resp. Z_T) :*

$$\begin{tikzcd} K(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X)_Z) \arrow[r, "- \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_T"] \arrow[d, "\chi"] & K(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X_T)_{Z_T}) \arrow[d, "\chi"] \\ c_{equi}(X/S, 0) \arrow[r, "f^\star"] & c_{equi}(X_T/T, 0) \end{tikzcd}$$

L'assertion concernant les composantes irréductibles de Z_T a été établie dans le lemme 1.1.3. Par construction, la compatibilité à établir pour tout élément $x \in K(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X)_Z)$ est satisfaite pour les éléments de la forme $[\mathscr{O}_D]$ où D est une composante irréductible de Z. Ceci permet de supposer que x est dans le noyau de l'application $K(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X)_Z) \to c_{\mathrm{equi}}(X/S, 0)$.

Autrement dit, il s'agit de montrer que si x appartient à $\ker(K(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X)_Z) \xrightarrow{\chi} c_{\mathrm{equi}}(X/S, 0))$, alors l'image de x *via* le foncteur $- \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_X$ appartient à $\ker(K(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X_T)_{Z_T}) \xrightarrow{\chi} c_{\mathrm{equi}}(X_T/T, 0))$. De façon évidente, cette condition sur f se comporte bien par composition. Comme on peut raisonner localement pour la topologie de Zariski, on peut utiliser une factorisation de f sous la forme d'une immersion fermée suivie d'un morphisme lisse. Il suffit de traiter chacun de ces deux cas.

Par un dévissage sur les groupes de Grothendieck des faisceaux cohérents, on se ramène à montrer que si D est une composante irréductible de Z et $Y \subset D$ un sous-schéma fermé intègre strictement contenu dans D, alors $\chi_C(\mathscr{O}_Y \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_T) = 0$ pour toute composante irréductible C de Z_T. Si $f \colon T \to S$ est lisse, c'est évident. Si $f \colon T \to S$ est une immersion fermée, cela résulte de [13, Théorème 1 (a), §V.C.1] dans le cas où S et T sont des schémas de type fini sur un corps, et [3, Corollary 5.6] dans le cas général.

Pour démontrer la proposition 1.1.4, on peut appliquer le lemme précédent à f, g et $f \circ g$. L'isomorphisme évident $(- \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_T) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}_T} \mathscr{O}_U \simeq - \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_U$ de foncteurs $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X)_Z \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X_U)_{Z_U}$ pour un certain choix de Z permet d'obtenir l'identité voulue $g^\star(f^\star(x)) = (f \circ g)^\star(x)$ pour tout élément appartenant à l'image du morphisme $\chi \colon K(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(X)_Z) \to c_{\mathrm{equi}}(X/S, 0)$. Il est bien évidemment possible d'agrandir Z pour obtenir le résultat pour un élément arbitraire de $c_{\mathrm{equi}}(X/S, 0)$.

1.2 La catégorie $DM^{\mathbf{eff}}_{\leq 0}(S)$ pour un schéma régulier S

Le but de cette sous-section est de définir une catégorie $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)$ de « motifs » au-dessus de S. Dans le cas où $S = \operatorname{Spec} k$ est le spectre d'un corps parfait, la catégorie $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(k)$ s'identifiera à une sous-catégorie pleine de la catégorie $DM^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$ définie par Voevodsky [21, Chapter V] (cf. [18, Theorem 1.15]). On a choisi cette définition de façon à obtenir de façon aussi simple que possible l'adjonction entre cette catégorie $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)$ et la catégorie homotopique $\mathcal{H}_\bullet(S)$ (cf. sous-section 1.3). Il serait également possible de procéder à ces constructions en utilisant la théorie radditive (sic) de [19] comme dans [18, §1.2].

Définition 1.2.1 *Soit S un schéma régulier. Si X et Y sont des objets de Sm/S, on note $\mathrm{Cor}_S(X,Y) = c_{equi}(X \times_S Y/X, 0)$ Supposons que X, Y et Z soient des objets de Sm/S, que $\alpha \in \mathrm{Cor}_S(X,Y)$ et que $\beta \in \mathrm{Cor}_S(Y,Z)$. Notons p_{23}, p_{13}, p_{12} les morphismes de projection respectifs de $X\times_S Y\times_S Z$ sur $Y\times_S Z$, $X\times_S Z$ et $X\times_S Y$. On note $\beta\circ\alpha = p_{13\star}(p_{12}^\star\alpha\cdot p_{23}^\star\beta) \in \mathrm{Cor}_S(X,Z)$. Ceci définit la loi de composition pour une catégorie additive notée $SmCor/S$ dont les objets sont ceux de Sm/S et dont les groupes d'homophismes sont les groupes $\mathrm{Cor}_S(X,Y)$ pour $X, Y \in Sm/S$. On notera parfois $[X]$ l'objet de $SmCor/S$ associé à un objet X de Sm/S.*

Il convient d'indiquer pourquoi cette définition a un sens. Plus précisément, les cycles $p_{12}^\star\alpha$ et $p_{23}^\star\beta$ sur $X\times_S Y\times_S Z$ sont définis par image inverse par les morphismes plats p_{12} et p_{23} de la façon usuelle. Dans la situation où X, Y, Z et S sont connexes (cas auquel on se ramène facilement), on montre facilement que si G (resp. F) est une composante irréductible d'un sous-schéma fermé de $X\times_S Y\times_S Z$ intervenant dans l'écriture de $p_{12}^\star\alpha$ (resp. $p_{23}^\star\beta$), alors la codimension de G (resp. F) est la dimension relative de $Y\to S$ (resp. $Z\to S$). En procédant comme dans la démonstration du lemme 1.1.3, on montre ensuite que G et F s'intersectent proprement et que toutes les composantes irréductibles C de $G\cap F$ dominent X (en fait, $C\to X$ est fini surjectif). On définit le produit d'intersection $p_{12}^\star\alpha\cdot p_{23}^\star\beta$ en utilisant pour multiplicités les caractéristiques d'Euler de modules Tor comme dans [13, §V.C.1]. Le fait que les schémas C considérés plus haut soient finis sur C permet de définir l'image directe de ce cycle, et cette image est bien dans $\mathrm{Cor}_S(X,Y)$. L'associativité de cette loi de composition provient de l'associativité (non triviale) du produit d'intersection défini comme ci-dessus, et à vrai dire, comme les points génériques des fermés intervenant dans l'écriture des cycles sont tous dans la fibre des schémas considérés au-dessus du point générique de S, les résultats énoncés dans [13] pour les schémas réguliers d'égale caractéristique sont suffisants pour construire cette catégorie $SmCor/S$.

En associant à un morphisme $f\colon X\to Y$ dans Sm/S la correspondance finie donnée par le cycle du graphe de f, on obtient trivialement un foncteur $Sm/S\to SmCor/S$.

Définition 1.2.2 *On note $\mathbf{PST}_S$ la catégorie des foncteurs additifs $SmCor/S^{\mathrm{opp}}\to \mathrm{Ab}$. C'est la catégorie des préfaisceaux avec transferts. On dispose d'un foncteur d'oubli des transferts $\mathbf{PST}_S\to Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$ vers la catégorie des préfaisceaux d'ensembles (pointés) sur Sm/S. Un préfaisceau avec transferts qui devient un faisceau pour la topologie de Nisnevich après application de ce foncteur d'oubli est appelé « faisceau (Nisnevich) avec tranferts ». On note $\mathbf{ST}_S$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{PST}_S$ formée des faisceaux avec transferts.*

Définition 1.2.3 *Pour tout $X\in Sm/S$ et tout groupe abélien Λ, on note $\Lambda_{tr}(X)\in \mathbf{PST}_S$ le préfaisceau avec transferts défini par :*

$$\Lambda_{tr}(X)(U) = \mathrm{Hom}_{SmCor/S}(U,X) = \mathrm{Cor}_S(U,X) = c_{equi}(U\times_S X/U, 0)$$

pour tout $U\in SmCor/S$.

On vérifie facilement que $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$ appartient à $\mathbf{ST}_S$. (En fait, le préfaisceau sur Sm/S induit par $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$ est un faisceau pour la topologie étale.)

Lemme 1.2.4 *Le foncteur d'inclusion $\mathbf{ST}_S\to\mathbf{PST}_S$ admet un adjoint à gauche $a_{Nis}\colon \mathbf{PST}_S\to \mathbf{ST}_S$ qui commute avec l'oubli des tranferts. Pour $\mathcal{P}\in\mathbf{PST}_S$, on appelle $a_{Nis}\mathcal{P}$ le faisceau avec tranferts associé à $\mathcal{P}$.*

Le fait que cet adjoint à gauche commute à l'oubli des transferts justifie que l'on n'introduise pas une notation supplémentaire. Pour établir ce lemme, il s'agit essentiellement de munir de transferts le faisceau associé au préfaisceau sur Sm/S induit par $\mathcal{P}$ après oubli des tranferts. On note $a_{\mathrm{Nis}}\mathcal{P}$ ce faisceau associé. On présente ici une variante des arguments de [21, Lemma 3.1.6, Chapter V] et [1, §2.3].

Pour $X\in Sm/S$, tout élément $x\in (a_{\mathrm{Nis}}\mathcal{P})(X)$ est induit par un élément $\tilde{x}\in\ker(p^\star - q^\star\colon \mathcal{P}(U)\to\mathcal{P}(V))$ où $(a\colon U\to X, (p,q)\colon V\to U\times_X U)$ sont deux morphismes étales couvrants pour la topologie de Nisnevich (autrement dit, $U \to X$ et $V \to U \times_X U$ constituent un 1-hyper-recouvrement Nisnevich de X). On montre comme dans [21, Proposition 3.1.3, Chapter V] que le complexe de préfaisceaux avec tranferts

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}(V) \xrightarrow{p-q} \mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}(U) \to \mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \to X \to 0$$

induit après oubli des transferts une suite exacte de faisceaux abéliens sur Sm/S_{Nis}. L'élément $\tilde{x}$ définit un morphisme de préfaisceaux avec transferts $\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}(U)/\operatorname{Im}\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}(V) \to \mathcal{P}$, qui après oubli des transferts et passage au faisceau associé, définit d'après ce qui précède un morphisme $\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \to a_{\mathrm{Nis}}\mathcal{P}$ de faisceaux abéliens sur Sm/S_{Nis}. On vérifie facilement que ce morphisme ne dépend pas du représentant $\tilde{x}$ de x.

La donnée de ce morphisme $\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \to a_{\mathrm{Nis}}\mathcal{P}$ décrit l'action des tranferts sur x. On observe que ceci munit $a_{\mathrm{Nis}}\mathcal{P}$ d'une structure de faisceau avec transferts et que $\mathcal{P} \to a_{\mathrm{Nis}}\mathcal{P}$ est bien le morphisme universel de $\mathcal{P}$ vers un faisceau avec transferts.

Il résulte aussitôt de ce lemme que non seulement $\mathbf{PST}_S$ mais aussi $\mathbf{ST}_S$ sont des catégories abéliennes de Grothendieck, tout comme leurs versions $\mathbf{PST}_{S,\Lambda}$ et $\mathbf{ST}_{S,\Lambda}$ à coefficients dans un anneau commutatif Λ.

Définition 1.2.5 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne de Grothendieck. D'après [6], on peut définir une structure de catégorie de modèles sur la catégorie (non bornée) des complexes $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ à valeurs dans $\mathcal{C}$ de façon à ce que les équivalences faibles soient les quasi-isomorphismes, les cofibrations les monomorphismes et les fibrations les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales.*

On note $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ formée des complexes situés en degrés homologiques *positifs, c'est-à-dire des complexes de la forme $\ldots \longleftarrow 0 \longleftarrow K_0 \longleftarrow K_1 \longleftarrow K_2 \longleftarrow \ldots$. Le foncteur d'inclusion $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathcal{C}) \to \mathrm{C}(\mathcal{C})$ admet pour adjoint à droite le foncteur de troncature $\tau_{\geq 0}$ qui à un complexe $K \in \mathrm{C}(\mathcal{C})$ associe son sous-complexe $\ldots \longleftarrow 0 \longleftarrow \ker(d\colon K_0 \to K_{-1}) \longleftarrow K_1 \longleftarrow K_2 \longleftarrow \ldots$.*

On munit $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathcal{C})$ de la structure de catégorie de modèles dont les cofibrations sont les monomorphismes, les équivalences faibles les quasi-isomorphismes et les fibrations les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales (de $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathcal{C})$). En outre, le couple de foncteurs adjoints formé de l'inclusion de $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathcal{C})$ dans $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ et le foncteur de troncature $\tau_{\geq 0}$ est une adjonction de Quillen.

On note $\mathrm{D}\,\mathcal{C}$ et $\mathrm{D}_{\geq 0}\,\mathcal{C}$ les catégories homotopiques de ces catégories de modèles.

La structure de catégorie de modèles sur $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathcal{C})$ se déduit presqu'immédiatement de celle définie par Hovey [6] sur $\mathrm{C}(\mathcal{C})$. Le seul axiome qui pourrait poser une difficulté est le fait que dans $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathcal{C})$ les cofibrations ont bien la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales. Ceci peut se vérifier en utilisant l'astuce de Joyal (cf.[7, p. 64-65]). (On prendra garde au fait qu'une fibration de $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathcal{C})$ n'est pas forcément une fibration de $\mathrm{C}(\mathcal{C})$.)

Pour $\mathcal{C}$ parmi les catégories $\mathbf{PST}_{S,\Lambda}$, $\mathbf{ST}_{S,\Lambda}$ et Ab (la catégorie des groupes abéliens), on munit les catégories $\mathrm{C}\,\mathcal{C}$ et $\mathrm{C}_{\geq 0}\,\mathcal{C}$ des structures de catégories de modèles de la définition 1.2.5.

Définition 1.2.6 *Si $f\colon K \to L$ est un morphisme dans $\mathrm{C}(\mathrm{Ab})$, on note $coc\hat{o}ne(f) = c\hat{o}ne(f)[-1]$. (Le cône est un modèle de la cofibre homotopique de f. Dualement, le cocône est un modèle de la fibre homotopique de f : il s'insère dans un triangle distingué*

$$coc\hat{o}ne(f) \to K \to L \to coc\hat{o}ne(f)[1]\ .$$

Définition 1.2.7 *Soit un carré commutatif dans $\mathrm{C}(\mathrm{Ab})$:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "f"] \\ B' \arrow[r, "f'"'] & C \end{tikzcd}$$

On dit que ce carré est homotopiquement cartésien si le morphisme évident $A \to$ *cocône*$(B \oplus B' \xrightarrow{f-f'} C)$ *est un quasi-isomorphisme.*

Supposons que A, B, B' *et* C *soient dans* $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathrm{Ab})$. *On dit que le carré est homotopiquement cartésien dans* $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathrm{Ab})$ *si le morphisme évident* $A \to \tau_{\geq 0}$*cocône*$(B \oplus B' \xrightarrow{f-f'} C)$ *est un quasi-isomorphisme.*

On vérifie facilement que les catégories de modèles $\mathrm{C}(\mathrm{Ab})$ et $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathrm{Ab})$ sont propres (à gauche et à droite) et que les notions axiomatiques des carrés homotopiquement cartésien (cf. [4, §8, Chapter II]) dans l'une et l'autre de ces catégories de modèles coïncident avec celles définies ici. Le foncteur de Quillen à droite $K\colon \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathrm{Ab}) \simeq \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ab} \to \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}$ donné par l'équivalence de Dold-Kan ([4, §2, Chapter III]) préserve et reflète les équivalences faibles. Ainsi, un carré dans $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathrm{Ab})$ est homotopiquement cartésien si et seulement si le carré obtenu en appliquant le foncteur K est homotopiquement cartésien dans $\Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}$.

Dans [10, Definition 1.13], la propriété de Brown-Gersten est définir pour les préfaisceaux simpliciaux sur Sm/S. On la définit ici pour des préfaisceaux à valeurs dans $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathrm{Ab})$:

Définition 1.2.8 *Soit* K *un préfaisceau sur* Sm/S *à valeurs dans* $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathrm{Ab})$. *On dit que* K *vérifie la propriété de Brown-Gersten si* $K(\emptyset)$ *est acyclique et si pour tout carré distingué Nisnevich*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire que U *est un sous-schéma ouvert de* $X \in Sm/S$ *et que* $p\colon V \to X$ *est un morphisme étale induisant un isomorphisme au-dessus du fermé complémentaire* $Z = (X - U)_{réd}$, *alors le carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r] \arrow[d] & K(U) \arrow[d] \\ K(V) \arrow[r] & K(p^{-1}(U)) \end{tikzcd}$$

qui s'en déduit dans $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathrm{Ab})$ *est homotopiquement cartésien.*

Si $K \in \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda})$, *on dit qu'il vérifie la propriété de Brown-Gersten si le préfaisceau sur* Sm/S *déduit de* K *par composition avec le foncteur* $Sm/S \to SmCor/S$ *la vérifie.*

Proposition 1.2.9 *Le foncteur* $a_{Nis}\colon \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda}) \to \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$ *est un foncteur de Quillen à gauche. On note* $\mathbf{H}\colon \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda}) \to \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda})$ *le foncteur dérivé total à droite du foncteur d'inclusion* $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda}) \to \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda})$ *(c'est l'adjoint à droite du foncteur* $\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda}) \to \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$ *induit par* a_{Nis}*).*

Si $\mathcal{P} \in \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda})$, *alors le morphisme d'adjonction* $\mathcal{P} \to \mathbf{H}a_{Nis}\mathcal{P}$ *est un isomorphisme dans* $\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda})$ *si et seulement si* $\mathcal{P}$ *vérifie la propriété de Brown-Gersten.*

Il est évident que a_{Nis} préserve les cofibrations et les équivalences faibles. Avec son adjoint à droite le foncteur d'inclusion $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda}) \to \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda})$, ils constituent donc une adjonction de Quillen.

Pour la deuxième assertion (qui est homologue à [10, Proposition 1.16, p. 100]), on commence par observer que les objets fibrants $\mathcal{F}$ de $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$ vérifient la propriété de Brown-Gersten. Pour cela, on peut utiliser le critère [10, Remark 1.15, page 100] : comme $\mathcal{F}$ est un faisceau, il suffit de vérifier que pour toute immersion ouverte $U \to V$ dans Sm/S, le morphisme de restriction $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ induit une fibration d'ensembles simpliciaux après application du foncteur $K\colon \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathrm{Ab}) \to \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}$. Cette condition résulte d'un jeu d'adjonctions standard à partir de l'observation que le morphisme $\Lambda_{\mathrm{tr}}(U) \to \Lambda_{\mathrm{tr}}(V)$ est un monomorphisme dans $\mathbf{ST}_{S,\Lambda}$. Pour conclure, on utilise une résolution fibrante $\mathcal{P} \to \mathcal{F}$ et on applique la variante Nisnevich du théorème de Brown-Gersten [10, Lemma 1.18, p. 101].

Corollaire 1.2.10 *La catégorie* $\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$ *est équivalente à la catégorie homotopique de la localisation à la Bousfield de la catégorie de modèles* $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda})$ *dans laquelle les objets locaux sont ceux vérifiant la propriété de Brown-Gersten.*

On notera que d'après [11, Proposition A.4], les catégories de modèles que nous considérons sont cellulaires, il est donc possible de leur appliquer les techniques de localisation développées dans [5].

Définition 1.2.11 *Soit* Λ *un anneau commutatif. La localisation à la Bousfield de la catégorie de modèles* $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$ *par rapport aux morphismes* $\Lambda_{tr}(X \times \mathbf{A}^1) \to \Lambda_{tr}(X)$ *définit une nouvelle catégorie de modèles (*$\mathbf{A}^1$*-localisée) dont les équivalences faibles et les fibrations seront appelées* $\mathbf{A}^1$*-équivalences faibles et* $\mathbf{A}^1$*-fibrations.*

On note $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)$ *la catégorie homotopique de la structure de catégorie de modèles* $\mathbf{A}^1$*-localisée de* $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$.

D'après le corollaire 1.2.10, $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)$ est aussi équivalente à la catégorie homotopique de la localisation à la Bousfield de $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda})$ dont les objets locaux $\mathcal{F}$ sont ceux qui vérifient la propriété de Brown-Gersten et tels que $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(\mathbf{A}^1 \times X)$ soit un quasi-isomorphisme pour tout $X \in Sm/S$.

1.3 L'adjonction entre $DM^{\mathbf{eff}}_{\leq 0}(S)$ et $\mathcal{H}_\bullet(S)$

Définition 1.3.1 *On note* $\mathcal{H}_{s,\bullet}(S)$ *(resp.* $\mathcal{H}_\bullet(S)$*) la catégorie homotopique de la structure de catégorie de modèles sur* $\Delta^{\mathrm{opp}}Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$ *des préfaisceaux simpliciaux (pointés) sur* Sm/S *munie de la structure définie dans [7] pour le site* Sm/S_{Nis} *(resp. muni de la structure* $\mathbf{A}^1$*-localisée définie dans [10]). (Dans tous les cas, les cofibrations sont les monomorphismes.)*

Proposition 1.3.2 *On définit un foncteur d'oubli des transferts* $\mathrm{oub}\colon \mathrm{C}_{\geq 0}\,\mathbf{ST}_{S,\Lambda} \to \Delta^{\mathrm{opp}}Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$ *en combinant l'équivalence de Dold-Kan* $\mathrm{C}_{\geq 0}\,\mathbf{ST}_{S,\Lambda} \simeq \Delta^{\mathrm{opp}}\mathbf{ST}_{S,\Lambda}$ *(cf. [4, §2, Chapter III]) et le foncteur d'oubli* $\mathbf{ST}_{S,\Lambda} \to Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$*. Ce foncteur envoie les quasi-isomorphismes sur des équivalences faibles (locales pour la topologie de Nisnevich), ce qui induit un foncteur noté* $\mathrm{oub}\colon \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda}) \to \mathcal{H}_{s,\bullet}(S)$*. Ce foncteur admet un adjoint à gauche :*

$$\widetilde{M}\colon \mathcal{H}_{s,\bullet}(S) \to \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$$

Seule l'existence de l'adjoint à gauche est à justifier. Il est formel que le foncteur d'oubli $\mathbf{ST}_{S,\Lambda} \to Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$ admette un adjoint à gauche $\widetilde{L}\colon Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet \to \mathbf{ST}_{S,\Lambda}$. En effet, pour (X, x) un objet pointé Sm/S, l'image par $\widetilde{L}$ du préfaisceau représenté par X et pointé par x est $\mathrm{coker}(\Lambda_{\mathrm{tr}}(S) \xrightarrow{x} \Lambda_{\mathrm{tr}}(X))$. Dans le cas général, on utilise qu'un préfaisceau pointé est colimite de préfaisceaux représentables. On étend $\widetilde{L}$ en un foncteur $\Delta^{\mathrm{opp}}Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet \to \Delta^{\mathrm{opp}}\mathbf{ST}_{S,\Lambda}$ et on note encore $\widetilde{L}\colon \Delta^{\mathrm{opp}}Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet \to \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$ le foncteur obtenu par composition avec l'équivalence de Dold-Kan.

Pour $\mathcal{X} \in \Delta^{\mathrm{opp}}Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$, un candidat naturel pour $\widetilde{M}\mathcal{X}$ est $\widetilde{L}\mathcal{X}$. On procède alors comme dans [10, p. 63-64] (voir aussi [11, §2.1]). On dit qu'un objet $\mathcal{X}$ est admissible si pour tout objet fibrant $\mathcal{F} \in \mathrm{C}_{\geq 0}\,\mathbf{ST}_{S,\Lambda}$ et toute résolution fibrante $\mathrm{oub}\,\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ dans $\Delta^{\mathrm{opp}}Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$, le morphisme évident d'ensembles simpliciaux suivant est une équivalence faible :

$$\mathrm{hom}(\widetilde{L}\mathcal{X}, \mathcal{F}) \to \mathrm{hom}(\mathcal{X}, \mathcal{G}) \; .$$

Ici, hom désigne les bifoncteurs Hom simpliciaux provenant des structures simpliciales évidentes sur $\mathrm{C}_{\geq 0}\,\mathbf{ST}_{S,\Lambda} \simeq \Delta^{\mathrm{opp}}\mathbf{ST}_{S,\Lambda}$ et $\Delta^{\mathrm{opp}}Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$. Du fait de l'adjonction (simpliciale) entre oub et $\widetilde{L}$, cela s'énonce aussi en disant que

$$\mathrm{hom}(\mathcal{X}, \mathrm{oub}\,\mathcal{F}) \to \mathrm{hom}(\mathcal{X}, \mathcal{G})$$

est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

En passant au π_0 l'équivalence faible ci-dessus, on obtient aussitôt que si $\mathcal{X}$ est admissible, alors le foncteur adjoint $\widetilde{M}$ est défini en $\mathcal{X}$ et $\widetilde{M}(\mathcal{X}) = \widetilde{L}(\mathcal{X})$. Montrer que l'adjoint à gauche $\widetilde{M}$ existe revient à montrer que tout objet de $\mathcal{H}_{\mathrm{s},\bullet}(S)$ peut être représenté par un préfaisceau simplicial pointé admissible, ce que nous allons faire (et la démonstration montre qu'en fait $\widetilde{M}$ est le foncteur dérivé total à gauche de $\widetilde{L}$).

En utilisant des lemmes de résolutions (voir [10, Lemma 1.16, p. 52]), on peut supposer que $\mathcal{X}$ est un préfaisceau simplicial tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{X}_n$ soit une somme directe de préfaisceaux (pointés) représentables. Pour montrer qu'un tel préfaisceau $\mathcal{X}$ est admissible, en utilisant les propriétés des objets admissibles (cf. [10, Lemma 1.53, p. 64] et [11, Lemmes 2.7 et 2.8]) on peut se ramener au cas où $\mathcal{X}$ est induit par un préfaisceau d'ensembles représenté par un objet pointé (X, x) de Sm/S. Il s'agit de montrer que l'application d'ensembles simpliciaux

$$\hom((X,x), \operatorname{oub}\mathcal{F}) \to \hom((X,x), \mathcal{G})$$

est une équivalence faible. L'ensemble simplicial $\hom((X,x), \operatorname{oub}\mathcal{F})$ est la fibre du morphisme d'ensembles simpliciaux pointés $\operatorname{oub}\mathcal{F}(X) \xrightarrow{x^\star} \operatorname{oub}\mathcal{F}(S)$ (de même pour $\mathcal{G}$). Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\operatorname{oub}\mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ et $\operatorname{oub}\mathcal{F}(S) \to \mathcal{G}(S)$ sont des équivalences faibles et que les morphismes $\operatorname{oub}\mathcal{F}(X) \to \operatorname{oub}\mathcal{F}(S)$ et $\mathcal{G}(X) \to \mathcal{G}(S)$ induits par x sont des fibrations. La première assertion résulte du théorème de Brown-Gersten puisqu'aussi bien $\mathcal{F}$ que $\mathcal{G}$ vérifient la propriété de Brown-Gersten. La deuxième assertion se déduit facilement du fait que les objets $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont fibrants dans $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$ et $\Delta^{\mathrm{opp}} Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$ respectivement.

Lemme 1.3.3 *Soit $U \to X$ une immersion ouverte dans Sm/S. Alors, le préfaisceau pointé X/U est admissible au sens introduit dans la démonstration de la proposition 1.3.2. Autrement dit, on a un isomorphisme $\widetilde{M}(X/U) \simeq \Lambda_{tr}(X)/\Lambda_{tr}(U)$.*

Ceci repose sur le principe [10, Lemma 1.53(3), p. 65] qui s'applique puisque $U \to X$ et $\Lambda_{\mathrm{tr}}(U) \to \Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$ sont des monomorphismes.

Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguité sur le sens de l'énoncé de la proposition 1.3.5, on précise la définition d'objet $\mathbf{A}^1$-local utilisée ici :

Définition 1.3.4 *Si $\mathcal{F} \in \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$, on dit que $\mathcal{F}$ est $\mathbf{A}^1$-local si pour tout morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ tel que $\mathcal{F}'$ soit fibrant (pour la structure non $\mathbf{A}^1$-localisée), le morphisme $\mathcal{F}'(X) \to \mathcal{F}'(\mathbf{A}^1 \times X)$ est un quasi-isomorphisme pour tout $X \in Sm/S$. On dit que $\mathcal{F} \in \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda})$ est $\mathbf{A}^1$-local si $a_{Nis}\mathcal{F}$ est $\mathbf{A}^1$-local au sens ci-dessus. (Noter que la condition ne dépend que de la classe d'isomorphisme de l'image de $\mathcal{F}$ dans la catégorie $\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$. Noter aussi que cela a un sens de dire d'un morphisme dans $\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$ que c'est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible.)*

On utilise une définition semblable des objets $\mathbf{A}^1$-locaux dans $\mathcal{H}_{\mathrm{s},\bullet}(S)$, voir [10, Definition 3.1, p. 86].

Proposition 1.3.5 *Le foncteur* $\operatorname{oub}\colon \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda}) \to \mathcal{H}_{s,\bullet}(S)$ *envoie les objets $\mathbf{A}^1$-locaux sur des objets $\mathbf{A}^1$-locaux. Un morphisme f dans $\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible si et seulement si* $\operatorname{oub} f$ *est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible.*

Si $\mathcal{F}$ est un objet fibrant de $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$ (pour la structure non $\mathbf{A}^1$-localisée), alors $\mathcal{F}$ vérifie la propriété de Brown-Gersten. Dire que $\mathcal{F}$ est $\mathbf{A}^1$-local revient à dire que $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(\mathbf{A}^1 \times X)$ est un quasi-isomorphisme. Après application du foncteur oub, $\operatorname{oub}\mathcal{F}$ vérifie encore bien sûr la propriété de Brown-Gersten. L'hypothèse que $\mathcal{F}$ est $\mathbf{A}^1$-local montre alors que $\operatorname{oub}\mathcal{F}(X) \to \operatorname{oub}\mathcal{F}(\mathbf{A}^1 \times X)$ est une équivalence faible, ce qui conjointement avec la propriété de Brown-Gersten, implique que $\operatorname{oub}\mathcal{F}$ est $\mathbf{A}^1$-local.

Observons qu'il découle de ceci que si $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible entre objets $\mathbf{A}^1$-locaux, c'est une équivalence faible, donc $\operatorname{oub}\mathcal{F} \to \operatorname{oub}\mathcal{G}$ est une équivalence faible, *a fortiori* une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible.

Pour montrer que oub préserve les $\mathbf{A}^1$-équivalences faibles, il suffit donc de montrer que pour tout $\mathcal{F} \in \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$, pour une certaine $\mathbf{A}^1$-résolution fonctorielle $\mathcal{F}'$, à savoir que $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible et $\mathcal{F}'$ est $\mathbf{A}^1$-local, alors $\mathrm{oub}\,\mathcal{F} \to \mathrm{oub}\,\mathcal{F}'$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible.

Pour cela, on utilise une variante des constructions $\mathrm{Sing} = \mathrm{Sing}^{\mathbf{A}^1}$ de [10, p. 85–91] et $C_\star$ de [21, Proposition 3.2.3, Chapter 5]. On note $\mathbf{\Delta}^\bullet$ l'objet cosimplicial standard dans Sm/S formé par des espaces affines. Soit $\mathcal{X}$ un préfaisceau simplicial sur Sm/S. Pour $U \in Sm/S$, on note $\mathbf{Hom}(U, \mathcal{X})$ le préfaisceau simplicial qui à $V \in Sm/S$ associe $\mathcal{X}(U \times_S V)$. L'application qui à n associe $\mathbf{Hom}(\mathbf{\Delta}^n, \mathcal{X})$ définit un objet simplicial dans la catégorie des préfaisceaux simpliciaux, autrement dit un préfaisceau bisimplicial. On note $\mathrm{Sing}\,\mathcal{X} \in \Delta^{\mathrm{opp}} Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$ la diagonale de cet objet bisimplicial. D'après [10, Corollary 3.8, p. 89], le morphisme évident $\mathcal{X} \to \mathrm{Sing}\,\mathcal{X}$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible.

La construction $\mathbf{Hom}(U, \mathcal{X})$ mentionnée plus haut pour $U \in Sm/S$ admet une variante quand on remplace le préfaisceau simplicial $\mathcal{X}$ par un objet $\mathcal{F} \in \mathbf{PST}_{S,\Lambda}$ (ceci est lié au produit tensoriel sur $SmCor/S$ étendant le produit dans Sm/S). Cette construction $\mathbf{Hom}(U, -)$ commute à l'oubli des tranferts. Ainsi, si $\mathcal{F} \in \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$, modulo l'identification $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda}) \simeq \Delta^{\mathrm{opp}}\mathbf{ST}_{S,\Lambda}$, on obtient un objet $\mathrm{Sing}\,\mathcal{F} \in \Delta^{\mathrm{opp}}\mathbf{ST}_{S,\Lambda} \simeq \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$. Pour aller plus loin, nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 1.3.6 *Soit $\mathcal{F} \in \mathbf{PST}_{S,\Lambda}$. Alors, le morphisme évident $\mathbf{Hom}(\mathbf{A}^1, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible.*

La démonstration de ce fait est étonnamment délicate. On note $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbf{A}^1) \otimes -\colon \mathbf{PST}_{S,\Lambda} \to \mathbf{PST}_{S,\Lambda}$ le foncteur adjoint du foncteur $\mathbf{Hom}(\mathbf{A}^1, -)\colon \mathbf{PST}_{S,\Lambda} \to \mathbf{PST}_{S,\Lambda}$. Il envoie $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$ sur $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbf{A}^1 \times X)$ et par la compatibilité que ce foncteur doit vérifier par rapport aux colimites, on l'étend tautologiquement à $\mathbf{PST}_{S,\Lambda}$. Si $\mathcal{X} \in \mathbf{PST}_{S,\Lambda}$ est une somme directe de préfaisceaux de la forme $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$, alors $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbf{A}^1) \otimes \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ est tautologiquement une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible parce qu'une somme directe de $\mathbf{A}^1$-équivalences faibles est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible. En utilisant une variante appropriée de [10, Proposition 2.14, page 74], on obtient que si $\mathcal{X} \in \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda})$ est tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{X}_n$ soit une somme directe de préfaisceaux $\Lambda_{\mathrm{tr}}(X)$, alors $\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbf{A}^1) \otimes \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible. Il en résulte que pour un tel objet $\mathcal{X}$, les deux morphismes $\mathcal{X} \to \Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbf{A}^1) \otimes \mathcal{X}$ définis par les S-points 0 et 1 de $\mathbf{A}^1_S$ deviennent égaux dans la catégorie $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)$. Ceci vaut en fait pour tout $\mathcal{X} \in \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda})$ puisqu'il existe un quasi-isomorphisme $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ dans $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda})$ tel que $\mathcal{X}'$ soit de la forme particulière ci-dessus.

Pour $\mathcal{F} \in \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda})$, on considère ensuite le morphisme

$$\varphi\colon \Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbf{A}^1) \otimes \mathbf{Hom}(\mathbf{A}^1, \mathcal{F}) \to \mathbf{Hom}(\mathbf{A}^1, \mathcal{F})$$

qui correspond par adjonction au morphisme

$$\mathbf{Hom}(\mathbf{A}^1, \mathcal{F}) \to \mathbf{Hom}(\mathbf{A}^1, \mathbf{Hom}(\mathbf{A}^1, \mathcal{F})) = \mathbf{Hom}(\mathbf{A}^2, \mathcal{F})$$

qui provienne par fonctorialité du morphisme $\mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^1$ qui à (x, y) associe xy.

En composant ce morphisme φ avec les deux morphismes $\mathbf{Hom}(\mathbf{A}^1, \mathcal{F}) \to \Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbf{A}^1) \otimes \mathbf{Hom}(\mathbf{A}^1, \mathcal{F})$ correspondant à 0 et 1, on obtient que le morphisme composé évident $\mathbf{Hom}(\mathbf{A}^1, \mathcal{F}) \xrightarrow{0^\star} \mathcal{F} \to \mathbf{Hom}(\mathbf{A}^1, \mathcal{F})$ devient l'identité dans $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)$, ce qui permet de finir la démonstration du lemme 1.3.6.

On peut maintenant finir la démonstration de la proposition 1.3.5. Grâce au lemme précédent, en procédant comme dans le cas des préfaisceaux simpliciaux, on obtient que pour tout $\mathcal{F} \in \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$, le morphisme évident $\mathcal{F} \to \mathrm{Sing}\,\mathcal{F}$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible (c'est-à-dire devient un isomorphisme dans $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)$).

Notons Ex un foncteur de résolution fibrante sur $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$ (pour la structure non $\mathbf{A}^1$-localisée) et $F = \mathrm{Sing} \circ \mathrm{Ex}\colon\ \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda}) \to \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$. En utilisant la transformation naturelle $\mathrm{Id} \to F$ pour définir des morphismes $F^n \to F \circ F^n = F^{n+1}$, on obtient un système inductif $(F^n)_{n \geq 0}$ de foncteurs dont on note F^∞ la colimite. Pour tout $\mathcal{F} \in \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$, le morphisme $\mathcal{F} \to F^\infty\mathcal{F}$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible et $F^\infty\mathcal{F}$ est $\mathbf{A}^1$-local d'après l'argument de [10, Lemma 2.6, p. 107].

En observant que Sing commute à l'oubli des transferts, on peut utiliser [10, p. 107] pour obtenir que le morphisme $\mathrm{oub}\,\mathcal{F} \to \mathrm{oub}\,F^\infty\mathcal{F}$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible dans $\mathcal{H}_{\mathrm{s},\bullet}(S)$.

Pour montrer que oub préserve et reflète les $\mathbf{A}^1$-équivalences faibles, en utilisant le résultat du paragraphe précédent, on peut supposer que la source et le but de la flèche considérée dans $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$ sont $\mathbf{A}^1$-locaux. Dans ce cas, les notions de $\mathbf{A}^1$-équivalences faibles et d'équivalences faibles (locales pour la topologie de Nisnevich) coïncident. On est ainsi ramené à vérifier que si $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme dans $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$, alors f est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\mathrm{oub}\,f$ est une équivalence faible (locale pour la topologie de Nisnevich), ce qui est évident.

On déduit aussitôt des propositions 1.3.2 et 1.3.5 le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.7 *Le foncteur* $\mathrm{oub}\colon\ \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda}) \to \Delta^{\mathrm{opp}}Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$ *préservant les* $\mathbf{A}^1$*-équivalences faibles, il définit par localisation un foncteur* $K\colon DM^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(S) \to \mathcal{H}_\bullet(S)$*. Le foncteur* $\widetilde{M}\colon \mathcal{H}_{s,\bullet}(S) \to \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$ *préservant les* $\mathbf{A}^1$*-équivalences faibles, on note aussi* $\widetilde{M}\colon \mathcal{H}_\bullet(S) \to DM^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(S)$ *le foncteur qu'il induit et qui est adjoint à gauche de* K*.*

1.4 La fonctorialité élémentaire de la catégorie $DM^{\mathbf{eff}}_{\leq 0}(S)$

Dans cette sous-section, on se donne un morphisme $f\colon T \to S$ entre schémas réguliers. On définit un foncteur $f^\star\colon SmCor/S \to SmCor/T$ qui sur les objets envoie $X \in Sm/S$ sur $X_T = X \times_S T \in Sm/T$ et qui au niveau des morphismes, pour X et Y dans Sm/S, soit donné par l'application de changement de base (cf. définition 1.1.2) :

$$c_{\mathrm{equi}}(X \times_S Y/X, 0) \to c_{\mathrm{equi}}(X_T \times_T Y_T/X_T, 0)\ .$$

Il n'est pas bien difficile de vérifier que cette définition est compatible à la composition des correspondances finies, c'est-à-dire que ceci définit bien un foncteur $f^\star\colon SmCor/S \to SmCor/T$.

La composition avec le foncteur additif $f^\star\colon SmCor/T \to SmCor/S$ définit un foncteur $f_\star\colon \mathbf{PST}_{T,\Lambda} \to \mathbf{PST}_{S,\Lambda}$ (qui applique la sous-catégorie $\mathbf{ST}_{T,\Lambda}$ dans $\mathbf{ST}_{S,\Lambda}$). Ce foncteur $f_\star\colon \mathbf{PST}_{T,\Lambda} \to \mathbf{PST}_{S,\Lambda}$ admet un adjoint à gauche $f^\star\colon \mathbf{PST}_{T,\Lambda} \to \mathbf{PST}_{S,\Lambda}$ (qui étend par passage à la limite inductive le foncteur $f^\star\colon SmCor/T \to SmCor/S$ sur les objets représentables).

La catégorie $\mathbf{PST}_{S,\Lambda}$ admettant suffisamment d'objets projectifs, il est permis d'introduire le foncteur dérivé total à gauche $\mathbf{L}f^\star\colon\ \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda}) \to \mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{T,\Lambda})$.

Proposition 1.4.1 *Si* $\rho\colon\ \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{T,\Lambda}) \to \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{T,\Lambda})$ *est une résolution* $\mathbf{A}^1$*-fibrante, le foncteur* $f_\star \circ \rho\colon\ \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{T,\Lambda}) \to \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda})$ *préserve les* $\mathbf{A}^1$*-équivalences faibles. Il induit donc un foncteur* $\mathbf{R}f_\star\colon DM^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(T, \Lambda) \to DM^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(S, \Lambda)$.

Le foncteur $\mathbf{L}f^\star\colon\ \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda}) \to \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{T,\Lambda})$ *préserve les* $\mathbf{A}^1$*-équivalences faibles. Le couple de foncteurs* $(\mathbf{L}f^\star, \mathbf{R}f^\star)$ *ainsi défini entre les catégories* $DM^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(T, \Lambda)$ *et* $DM^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(S, \Lambda)$ *est un couple de foncteurs adjoints.*

La démonstration est essentiellement la même que celle de [10, Proposition 2.8, p. 108]. Cela vaut aussi pour l'énoncé suivant, homologue de [10, Proposition 2.9, p. 108] :

Proposition 1.4.2 *Supposons que le morphisme* $f\colon T \to S$ *soit lisse. Le foncteur* $f^\star\colon SmCor/S \to SmCor/T$ *admet alors un adjoint à gauche* $f_\sharp\colon SmCor/T \to SmCor/S$ *(qui au niveau des objets représentables est tel que pour tout* $X \in Sm/T$*,* $f_\sharp[X] = [X]$ *où, à droite,* X *est considéré comme un objet de* Sm/S*). Le foncteur* $f^\star\colon \mathbf{PST}_{S,\Lambda} \to \mathbf{PST}_{T,\Lambda}$ *s'identifie à la composition avec* $f_\sharp\colon SmCor/T \to SmCor/S$*. Le couple de foncteurs* $(f^\star, f_\star)$ *entre* $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{T,\Lambda})$ *et* $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_{S,\Lambda})$ *(resp.* $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{T,\Lambda})$ *et* $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{S,\Lambda})$*) est une adjonction de Quillen (pour les structures* $\mathbf{A}^1$*-localisées ou non) ; on peut alors identifier* $f^\star$ *et* $\mathbf{L}f^\star$*. Enfin, le foncteur* $f^\star\colon DM^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(S, \Lambda) \to DM^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(T, \Lambda)$ *admet un adjoint à gauche* $\mathbf{L}f_\sharp$*.*

1.5 Isomorphisme de Thom relatif

Soit k un corps parfait. Soit Λ un anneau commutatif de coefficients. Le foncteur d'inclusion de $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{k,\Lambda})$ dans la catégorie des complexes bornés supérieurement (pour la numérotation cohomologique) induit un foncteur pleinement fidèle $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(k,\Lambda) \to DM^{\mathrm{eff}}_{-}(k,\Lambda)$ (ceci découle aussitôt du fait que le foncteur de $\mathbf{A}^1$-localisation $C_\star$ de [21, Proposition 3.2.3, Chapter V] préserve $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{ST}_{k,\Lambda})$).

Pour $M \in DM^{\mathrm{eff}}_{-}(k,\Lambda)$ et $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$, on note $H^{p,q}(M) = \mathrm{Hom}_{DM^{\mathrm{eff}}_{-}(k,\Lambda)}(M, \mathbf{Z}(q)[p])$ où $\mathbf{Z}(q) = 0$ si $q < 0$ et $\mathbf{Z}(q)[2q] = \widetilde{M}(\mathbf{A}^q/\mathbf{A}^q - \{0\}) \in DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(k,\Lambda)$.

Pour $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$, on note aussi $\widetilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}) = H^{p,q}(\widetilde{M}(\mathcal{X}))$ et pour $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(k)$, $H^{p,q}(\mathcal{X}) = \widetilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}_+)$.

Définition 1.5.1 *Soit $S \in Sm/k$. Soit L un fibré en droites sur S. On note $c_1(L)$ la classe de L dans $H^{2,1}(S) \simeq \mathrm{Pic}(S) \otimes \Lambda$ (cf. [21, Corollary 3.4.3, Chapter V]). Soit E un fibré vectoriel de rang r, on note $c_1(E), \dots, c_r(E)$ les uniques éléments de $H^{2\star,\star}(S)$ tels que*

$$\xi^r + c_1(E)\xi^{r-1} + \cdots + c_r(E)$$

appartienne au noyau de $H^{2r,r}(\mathbf{P}(E \oplus \mathscr{O}_X)) \to H^{2r,r}(\mathbf{P}(E))$ où $\xi = c_1(\mathscr{O}(1))$ [2].

On note $t_E \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathrm{Th}_S\, E) \simeq \ker(H^{2r,r}(\mathbf{P}(E \oplus \mathscr{O}_X)) \to H^{2r,r}(\mathbf{P}(E)))$ (voir [21, Proposition 3.5.1]) la classe correspondant à $\xi^r + c_1(E)\xi^{r-1} + \cdots + c_r(E)$ via *l'isomorphisme canonique* $\mathrm{Th}_S\, E = E/(E - \{0\}) \simeq \mathbf{P}(E \oplus \mathscr{O}_X)/\mathbf{P}(E)$ *dans $\mathcal{H}_\bullet(k)$.*

Proposition 1.5.2 *Soit $S \in Sm/k$. Soit E un fibré vectoriel de rang r sur S. Alors, le morphisme*

$$\widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, E) \to \widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, \mathbf{A}^r)$$

dans $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(k,\Lambda)$ induit par la classe $t_E \in H^{2r,r}(S)$ est un isomorphisme dans $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S,\Lambda)$. En particulier, t_E induit un isomorphisme $K\widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, E) \xrightarrow{\sim} K\widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, \mathbf{A}^r)$ dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$.

On peut considérer $\mathrm{Th}_S\, E$ comme un objet aussi bien de $\mathcal{H}_\bullet(S)$ que de $\mathcal{H}_\bullet(k)$, mais on a bien sûr $a_\sharp \mathrm{Th}_S\, E = \mathrm{Th}_S\, E$ et $a_\sharp \widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, E) = \widetilde{M}(a_\sharp \mathrm{Th}_S\, E)$. On a des bijections :

$$\begin{aligned} H^{2r,r}(\mathrm{Th}_S\, E) &= \mathrm{Hom}_{DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(k,\Lambda)}(a_\sharp \widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, E), \widetilde{M}(\mathrm{Th}_k\, \mathbf{A}^r)) \\ &= \mathrm{Hom}_{DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)}(\widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, E), a^\star \widetilde{M}(\mathrm{Th}_k\, \mathbf{A}^r) \\ &= \mathrm{Hom}_{DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)}(\widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, E), \widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, \mathbf{A}^r)) \end{aligned}$$

Ainsi, à t_E correspond bien un morphisme $\widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, E) \to \widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, \mathbf{A}^r)$ dans $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)$. Pour montrer que c'est un isomorphisme, on peut utiliser les foncteurs de restriction évidents $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S,\Lambda) \to DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(U,\Lambda)$ où U parcourt un recouvrement de S par des ouverts au-dessus desquels E est trivial. On peut ainsi supposer que $E = \mathbf{A}^r_S$. Ensuite, on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}\, k$ et cela résulte alors de [21, Proposition 3.5.1, Chapter V].

Remarque 1.5.3 *Dans le cas où le fibré E est $\mathbf{A}^r_S$, l'isomorphisme de la proposition 1.5.2 est bien évidemment l'identité, pourvu qu'on ait fait le bon choix de signe dans l'isomorphisme $H^{2,1}(S,\mathbf{Z}) \simeq \mathrm{Pic}(S)$.*

1.6 Classes tautologiques

On suppose ici que k est un corps parfait et que $S \in Sm/k$.

[2] Ici, $\mathbf{P}(E)$ est le Proj de l'Algèbre symétrique du dual de E.

Définition 1.6.1 *Pour tout fibré vectoriel E sur S, on note $K_E \in \Delta^{\mathrm{opp}} Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$ le préfaisceau $K\widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, E)$. En particulier, pour tout entier naturel r, on note $K_r = K_{\mathbf{A}^r_S}$.*

D'après l'isomorphisme de Thom relatif (cf. proposition 1.5.2), on a un isomorphisme canonique $K_E \simeq K_r$ dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$ si E est un fibré vectoriel de rang r sur S.

Proposition 1.6.2 *Soit E un fibré vectoriel de rang r sur S. On note τ_E le morphisme tautologique (d'adjonction) $\tau_E \colon \mathrm{Th}_S\, E \to K_E = K\widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, E)$ dans $Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$. Alors, le diagramme suivant est commutatif dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Th}_S\, E \arrow[r, "\tau_E"] \arrow[dr, "t_E"'] & K_E \arrow[d, "\sim"] \\ & K_r \end{tikzcd}$$

En vertu de l'adjonction de la sous-section 1.3, cette compatibilité est tautologique puisque les deux morphismes $t_E \colon \mathrm{Th}_S\, E \to K_r$ et $K_E \simeq K_r$ sont d'une manière ou d'une autre induits par la classe de Thom t_E.

Proposition 1.6.3 *On suppose donnés deux fibrés vectoriels E et F de rangs respectifs r et s sur S. Alors, le diagramme suivant est commutatif dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$, où les morphismes horizontaux sont les morphismes « produits » évidents et les morphismes verticaux sont induits par l'isomorphisme de Thom relatif appliqué à E, F et $E \oplus F$:*

$$\begin{tikzcd} K_E \wedge K_F \arrow[r] \arrow[d] & K_{E\oplus F} \arrow[d] \\ K_r \wedge K_s \arrow[r] & K_{r+s} \end{tikzcd}$$

En utilisant l'adjonction de la sous-section 1.3, cela se déduit du diagramme commutatif qui énonce une compatibilité facile des classes de Thom à la somme directe des fibrés :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, E) \otimes \widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, F) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "t_E \otimes t_F"] & \widetilde{M}(\mathrm{Th}_S(E \oplus F)) \arrow[d, "t_{E\oplus F}"] \\ \widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, \mathbf{A}^r_S) \otimes \widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, \mathbf{A}^r_S) \arrow[r, "\sim"] & \widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, \mathbf{A}^{r+s}_S) \end{tikzcd}$$

Remarque 1.6.4 *On a utilisé ici le produit tensoriel sur la catégorie $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S, \Lambda)$. Il n'en sera pas fait ici un usage intensif, mais il convient d'en esquisser une construction. Ce produit tensoriel provient d'une structure monoïdale symétrique sur $SmCor/S$ qui est telle que $[X] \otimes [Y] = [X \times_S Y]$. Cette structure monoïdale s'étend sans difficulté à la sous-catégorie pleine $\mathcal{S}$ de $\mathrm{C}_{\geq 0}\, \mathbf{PST}_{S,\Lambda}$ formée des complexes de préfaisceaux avec transferts qui terme à terme sont sommes directes de préfaisceaux représentés par des objets de $SmCor/S$. Comme à équivalences faibles près, on peut remplacer (fonctoriellement) tout objet de $\mathrm{C}_{\geq 0}\, \mathbf{PST}_{S,\Lambda}$ par un objet de $\mathcal{S}$, il suffit de justifier que $\otimes \colon \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ préserve les équivalences faibles. Pour cela, on se ramène à montrer que pour tout $[U] \in SmCor/S$, le foncteur $- \otimes [U] \colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ préserve les ($\mathbf{A}^1$-)équivalences faibles. Ceci s'obtient facilement en considérant le foncteur $\mathbf{Hom}([U], -) \colon \mathrm{C}_{\geq 0}\, \mathbf{PST}_{S,\Lambda} \to \mathrm{C}_{\geq 0}\, \mathbf{PST}_{S,\Lambda}$ qui à K associe $[X] \longmapsto K([U] \otimes [X])$. On peut en effet dériver à droite ce foncteur pour obtenir $\mathbf{R}\,\mathbf{Hom}([U], -) \colon DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S, \Lambda) \to DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S, \Lambda)$, l'adjoint à gauche de ce foncteur étant donné sur les objets de $\mathcal{S}$ par la foncteur $- \otimes [U]$, lequel préserve donc les ($\mathbf{A}^1$)-équivalences faibles.*

2 Construction de l'opération totale

On fixe un corps de base parfait k. Soit Λ un anneau de coefficients. On se donne une action (à gauche) d'un groupe fini G sur un ensemble fini (non vide) A à n éléments. On fixe aussi $S \in Sm/k$ et $\pi\colon U \to S$ un G-torseur étale (à gauche) au-dessus de S (ainsi, $S = G\backslash U$). (Le seul cas véritablement intéressant est celui où l'action du groupe G sur A est fidèle.)

2.1 Construction de l'opération

L'action de G sur A et le torseur U permettent de définir un fibré vectoriel de rang n sur S par descente fidèlement plate :

Définition 2.1.1 *On note ξ le fibré vectoriel sur S défini à isomorphisme unique près par la donnée d'un isomorphisme de fibrés $\Phi\colon \pi^\star\xi \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_U^A$ tel que pour tout $g \in G$, le diagramme évident de fibrés vectoriels sur U commute :*

$$\begin{tikzcd}
\pi^\star\xi \arrow[r, equal] \arrow[d, "\Phi"] & (\pi\circ g)^\star\xi \arrow[r, dash, "\sim"] & g^\star\pi^\star\xi \arrow[d, "g^\star\Phi"] \\
\mathscr{O}_U^A & \mathscr{O}_U^A \arrow[l, "\circ g"'] & g^\star\mathscr{O}_U^A \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

où $\circ g$ est l'automorphisme (de permutation) de $\mathscr{O}_U^A$ induit par la bijection $A \to A$ correspondant à l'action de g.

Comme les matrices de permutation sont des matrices orthogonales, on peut remarquer qu'il existe un isomorphisme canonique de fibrés vectoriels $\xi \simeq \xi^\vee$ où $\xi^\vee$ est le dual de ξ.

Remarque 2.1.2 *Plus généralement, si V est une représentation k-linéaire de dimension finie de G, on peut remplacer $\mathscr{O}_U^A$ par $\mathrm{Hom}_k(V, \mathscr{O}_U)$ dans la définition ci-dessus pour associer à une telle représentation V un fibré vectoriel sur S. La définition ci-dessus correspond alors au cas particulier des représentations de permutation.*

Définition 2.1.3 *Pour tout fibré vectoriel E sur S, on définit un morphisme*

$$P_E\colon K_E \to K_{E\otimes\xi}$$

dans $\Delta^{\mathrm{opp}}Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$. Il est induit par le morphisme de préfaisceaux (aussi noté P_E) $\Lambda_{tr}(E) \to \Lambda_{tr}(E\otimes\xi)$ sur $Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$ faisant commuter le diagramme suivant pour tout $X \in Sm/S$:

$$\begin{tikzcd}
c_{equi}(X\times_S E/X, 0) \arrow[r, "P_E"] \arrow[dd, "x\longmapsto x^n", "①"'] & c_{equi}(X\times_S (E\otimes\xi)/X, 0) \arrow[d, "\pi^\star", "④\sim"'] \\
& c_{equi}(X\times_S (E^A\times_S U)/(X\times_S U), 0)^G \arrow[d, hook, "③"'] \\
c_{equi}(X\times_S E^A/X, 0) \arrow[r, "②"'] & c_{equi}(X\times_S (E^A\times_S U)/(X\times_S U), 0)
\end{tikzcd}$$

Le morphisme ① est celui d'« élévation à la puissance n » (qui induit un morphisme $K_E \to K_{E^A}$) : il est induit par la structure tensorielle sur $SmCor/S$ et la diagonale de E. Le morphisme ② provient du changement de base (étale) par $U \to S$, tout comme le morphisme ④. Il convient de préciser ce fait. Tout d'abord, l'action de G sur U induit une action sur $(E\otimes\xi)\times_S U$. Par construction, on a un isomorphisme canonique $(E\otimes\xi)\times_S U \simeq E^A\times_S U$ et cet isomorphisme est G-équivariant (où $E^A\times_S U$ est muni du produit de l'action par permutation sur E^A et de celle donnée sur U). Ceci définit les morphismes ③ et ④, ④ étant un isomorphisme par descente étale des cycles. L'existence de $P_E\colon \Lambda_{\mathrm{tr}}(E) \to \Lambda_{\mathrm{tr}}(E\otimes\xi)$ provient du fait que le composé de ① et ② se factorise par ③.

Si deux éléments x et x' de $c_{\mathrm{equi}}(X\times_S E/X,0)$ diffèrent d'un élément $y = x'-x \in c_{\mathrm{equi}}(X\times_S (E-\{0\})/X,0) \subset c_{\mathrm{equi}}(X\times_S E/X,0)$, alors la différence $(x+y)^n - x^n$ de leurs images par ① est une somme d'orbites sous l'action du groupe symétrique de termes $y^p x^{n-p}$ avec $p\geq 1$, ce qui montre que cette différence appartient à $c_{\mathrm{equi}}(X\times_S(E^A-\{0\})/X,0) \subset c_{\mathrm{equi}}(X\times_S(E^A)/X,0)$. La considération des variantes des morphismes de groupes ②, ③ et ④ où l'on aurait épointé les fibrés vectoriels E^A et $E\otimes\xi$ montre que $P_E(x')-P_E(x) \in c_{\mathrm{equi}}(X\times_S(E\otimes\xi-\{0\})/X,0) \subset c_{\mathrm{equi}}(X\times_S(E\otimes\xi)/X,0)$. Ainsi, le morphisme $P_E\colon \Lambda_{\mathrm{tr}}(E)\to\Lambda_{\mathrm{tr}}(E\otimes\xi)$ passe bien au quotient pour définir un morphisme $P_E\colon K_E \to K_{E\otimes\xi}$.

Les deux propositions suivantes sont évidentes :

Proposition 2.1.4 *Si E et F sont des fibrés vectoriels sur S, alors on dispose d'un diagramme commutatif (où les morphismes verticaux sont les morphismes « produits » évidents) :*

$$\begin{tikzcd} K_E \wedge K_F \arrow[rr, "P_E\wedge P_F"] \arrow[d] & & K_{E\otimes\xi}\wedge K_{F\otimes\xi} \arrow[d] \\ K_{E\oplus F} \arrow[r, "P_{E\otimes F}"] & K_{(E\oplus F)\otimes\xi} \arrow[r, "\sim"] & K_{E\otimes\xi\oplus F\otimes\xi} \end{tikzcd}$$

Proposition 2.1.5 *Si outre (G,A,U) on se donne un groupe fini G', un G'-ensemble fini A' et un G'-torseur étale U' au-dessus de S et que l'on note ξ' le fibré vectoriel sur S associé à (G',A',U') comme ξ l'était à (G,A,U), on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} & K_{E\otimes\xi} \arrow[dr, "P_{E\otimes\xi,(G',A',U')}"] & \\ K_E \arrow[ur, "P_{E,(G,A,U)}"] \arrow[rr, "P_{E,(G\times G',A\times A',U\times_S U')}"'] & & K_{E\otimes\xi\otimes\xi'} \end{tikzcd}$$

Définition 2.1.6 *Pour tout fibré vectoriel E de rang r sur S, on a défini un morphisme $P_E\colon K_E \to K_{E\otimes\xi}$ dans $\Delta^{\mathrm{opp}}Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$. En utilisant l'isomorphisme de Thom relatif pour E et $E\otimes\xi$, on en déduit un morphisme, noté aussi P_E :*

$$P_E\colon K_r \simeq K_E \xrightarrow{P_E} K_{E\otimes\xi} \simeq K_{rn}\ .$$

Ainsi, pour tout $\mathcal{X}\in\mathcal{H}_\bullet(S)$, P_E définit une application :

$$P_E\colon \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \to \widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathcal{X})$$

Nous verrons au §2.5 que cette action P_E ne dépend que du rang du fibré E (et bien sûr aussi de (G,A,U)). Notons cependant le calcul suivant :

Proposition 2.1.7 *Soit E un fibré vectoriel de rang r sur S. On note $t_E \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathrm{Th}_S\, E)$ la classe de Thom, on a alors :*

$$P_E(t_E) = \delta^\star t_{E\otimes\xi} \in \widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathrm{Th}_S(E\otimes\xi))$$

où $\delta\colon \mathrm{Th}_S\, E \to \mathrm{Th}_S\, E\otimes\xi$ est le morphisme induit l'inclusion $E\to E\otimes\xi$ déduite de l'inclusion évidente $\mathbf{A}^1_S \to \xi$.

En effet, d'après la proposition 1.6.2, il suffit de vérifier que, strictement, au niveau des cycles, on a $P_E(\tau_E) = \delta^\star(\tau_{E\otimes\xi})$, ce qui est immédiat.

2.2 Raffinement de l'opération totale

Définition 2.2.1 *On note* $\mathrm{Sc}_\bullet/S$ *la sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux pointés sur* Sm/S *formée des faisceaux pointés isomorphes à une somme directe d'objets de la forme* X_+ *pour* $X \in Sm^{qp}/S$ *(où* Sm^{qp}/S *est la sous-catégorie pleine de* Sm/S *formée des* S*-schémas quasi-projectifs).*

Définition 2.2.2 *Soit* $\mathcal{X} \in \Delta^{\mathrm{opp}} Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$*. On note* $\mathrm{Triv}/\mathcal{X}$ *la catégorie des morphismes* $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ *dans* $\Delta^{\mathrm{opp}} Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$ *qui sont des fibrations triviales locales et tels que* $\mathcal{X}' \in \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$*.*

On encourage le lecteur à lire [7, §1] où est définie la notion de fibration triviale locale. On rappelle que dans la situation considérée ici une fibration (triviale) locale est un morphisme de préfaisceaux simpliciaux induisant des fibrations (triviales) d'ensembles simpliciaux après application d'un ensemble conservatif de foncteurs fibres pour le site Sm/S_{Nis}.

Proposition 2.2.3 *Soit* $\mathcal{Y} \in \Delta^{\mathrm{opp}} Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$ *un préfaisceau tel que pour tout* $X \in Sm/S$*,* $\mathcal{Y}(X)$ *soit un ensemble simplicial fibrant. Alors, pour tout* $\mathcal{X} \in \Delta^{\mathrm{opp}} Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$ *:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \simeq \operatorname*{colim}_{\mathcal{X}' \in \mathrm{Triv}/\mathcal{X}^{\mathrm{opp}}} \pi_0 \hom(\mathcal{X}', \mathcal{Y})$$

Ceci résulte de [7, p. 55]. On pourra noter que le système inductif se factorise par la catégorie homotopique $\pi\mathrm{Triv}/\mathcal{X}$ de $\mathrm{Triv}/\mathcal{X}$. Il n'y a évidemment pas de différence entre la colimite indexée par $\mathrm{Triv}/\mathcal{X}^{\mathrm{opp}}$ et par $\pi\mathrm{Triv}/\mathcal{X}^{\mathrm{opp}}$. L'avantage est que la catégorie $\pi\mathrm{Triv}/\mathcal{X}^{\mathrm{opp}}$ est filtrante. Cependant, ni $\mathrm{Triv}/\mathcal{X}$ ni $\pi\mathrm{Triv}/\mathcal{X}$ ne sont des petites catégories, mais dans [10, Lemma 1.12, p. 51], il est montré que $\pi\mathrm{Triv}/\mathcal{X}^{\mathrm{opp}}$ contient une petite sous-catégorie pleine cofinale.

Corollaire 2.2.4 *Pour tout fibré vectoriel* E *sur* S *et* $\mathcal{X} \in \Delta^{\mathrm{opp}} Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$*, on a une bijection canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(\mathcal{X}, K_E) \simeq \operatorname*{colim}_{\mathcal{X}' \in \mathrm{Triv}/\mathcal{X}} \pi_0 \hom(\mathcal{X}', \mathrm{Sing}\, K_E)$$

Tout d'abord, les sections de $\mathrm{Sing}\, K_E$ sur les objets de Sm/S sont des ensembles simpliciaux induits par des groupes abéliens simpliciaux ; ils sont donc fibrants. En outre, $\mathrm{Sing}\, K_E$ est un objet $\mathbf{A}^1$-local de $\mathcal{H}_\bullet(S)$ (on peut supposer que E est trivial puisque la vérification est locale sur S, mais alors K_E est induit par un préfaisceau simplicial sur Sm/k qui est $\mathbf{A}^1$-local d'après [21, §3.2, Chapter V]).

Proposition 2.2.5 *On considère le foncteur* $Sm^{qp}/S \to Sm^{qp}/S$ *qui à* X *associe* $G\backslash(X^A \times_S U)$*. On en déduit un foncteur* $\mathrm{Sc}_\bullet/S \to \mathrm{Sc}_\bullet/S$ *noté* $\mathcal{X} \longmapsto G\backslash(\mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U)$ *qui à* X_+ *associe* $G\backslash(X^A \times_S U)_+$ *et qui commute aux limites inductives filtrantes. Le foncteur* $\Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S \to \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$ *que l'on en déduit préserve les équivalences faibles (locales pour la topologie de Nisnevich) et les* $\mathbf{A}^1$*-équivalences faibles.*

Ceci résulte des résultats principaux de [2, §5.1, 5.2] concernant les foncteurs $X \longmapsto X^A$ et $X \longmapsto G\backslash X$. On notera que les catégories homotopiques $\mathcal{H}_\bullet(S)$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{s},\bullet}(S)$ définies à partir de la catégorie Sm/S (ou Sm^{qp}/S, cela revient au même) sont des sous-catégories pleines des catégories homotopiques homologues définies en considérant la catégorie des S-schémas de type fini (quasi-projectifs) utilisée dans [2] ; cela s'obtient par exemple en utilisant des arguments semblables à ceux de [18, §1.3].

Définition 2.2.6 *La catégorie* $\mathcal{H}_\bullet(S)$ *étant équivalente à la catégorie obtenue en inversant formellement les* $\mathbf{A}^1$*-équivalences faibles dans* $\Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$*, la proposition 2.2.5 permet de définir un foncteur* $\mathcal{H}_\bullet(S) \to \mathcal{H}_\bullet(S)$ *déduit du foncteur précédemment défini sur* $\Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$ *et que nous noterons* $\mathcal{X} \longmapsto G\backslash_{\mathbf{L}}(\mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U)$*.*

Dans la suite, E sera un fibré vectoriel sur S.

Définition 2.2.7 *Soit $X \in Sm^{qp}/S$. On définit une application*

$$\tilde{P}_E \colon K_E(X) \to K_{E\otimes\xi}(G\backslash(X^A \times_S U))$$

de façon à faire commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
c_{equi}(X \times_S E/X, 0) \arrow[r, "\tilde{P}_E"] \arrow[dd, "x \mapsto x^{\otimes n}"] & c_{equi}(G\backslash(X^A \times_S U) \times_S (E \otimes \xi)/G\backslash(X^A \times U), 0) \arrow[d, "\sim"] \\
 & c_{equi}(G\backslash(X^A \times_S U \times_S E^A)/G\backslash(X^A \times U), 0) \arrow[d, hook] \\
c_{equi}(X^A \times_S E^A/X^A, 0) \arrow[r] & c_{equi}(X^A \times_S U \times_S E^A/X^A \times U, 0)
\end{tikzcd}$$

Le principe est le même que dans la définition 2.1.3 à ceci près que l'on n'a pas utilisé la diagonale $E \to E^A$. Cette construction raffine donc la première qui se déduit de celle-ci en prenant une image inverse par la diagonale $X = G\backslash(X \times_S U) \to G\backslash(X^A \times_S U)$.

Par passage à la limite, la définition de $\tilde{P}_E$ s'étend en une application

$$\tilde{P}_E \colon \operatorname{Hom}(\mathcal{X}, K_E) \to \operatorname{Hom}(G\backslash(\mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U), K_{E\otimes\xi})$$

pour tout $\mathcal{X} \in \mathrm{Sc}_\bullet/S$.

Si $D \in Sm^{\mathrm{qp}}/S$, on déduit de cette construction une application

$$\tilde{P}_E \colon \operatorname{Hom}(\mathcal{X}, \mathbf{Hom}(D, K_E)) \to \operatorname{Hom}(G\backslash(\mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U), \mathbf{Hom}(D, K_{E\otimes\xi}))$$

pour tout $\mathcal{X} \in \mathrm{Sc}_\bullet/S$. On peut en effet appliquer la construction précédente à $D_+ \wedge \mathcal{X}$ et utiliser le morphisme déduit de façon évidente de la diagonale de D :

$$D_+ \wedge (G\backslash(\mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U)) \to G\backslash(D_+^A \wedge \mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U)$$

En faisant parcourir à D les espaces affines de l'objet cosimplicial standard $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}$, on obtient un morphisme :

$$\tilde{P}_E \colon \operatorname{Hom}(\mathcal{X}, \operatorname{Sing} K_E) \to \operatorname{Hom}(G\backslash(\mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U), \operatorname{Sing} K_{E\otimes\xi})$$

pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$.

Définition 2.2.8 *En appliquant cette construction à $\Delta^n_+ \wedge \mathcal{X}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et en utilisant la diagonale de Δ^n (comme plus haut pour D), on peut observer que l'application précédente est l'application induite au niveau des 0-simplexes par un morphisme d'ensembles simpliciaux, aussi noté $\tilde{P}_E$, pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$:*

$$\tilde{P}_E \colon \operatorname{hom}(\mathcal{X}, \operatorname{Sing} K_E) \to \operatorname{hom}(G\backslash(\mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U), \operatorname{Sing} K_{E\otimes\xi}) \ .$$

Définition 2.2.9 *Soit $\mathcal{X} \in \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$. Pour tout $\mathcal{X}' \in \mathrm{Triv}/\mathcal{X}$, la construction précédente de $\tilde{P}_E$ et la proposition 2.2.5 permettent de définir la flèche de gauche sur le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\pi_0 \operatorname{hom}(\mathcal{X}', \operatorname{Sing} K_E) \arrow[r, "\tilde{P}_E"] \arrow[d] & \pi_0 \operatorname{hom}(G\backslash(\mathcal{X}'^{\wedge A \times_S U}), \operatorname{Sing} K_{E\otimes\xi}) \arrow[d] \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(G\backslash(\mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U), K_{E\otimes\xi}) \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(G\backslash(\mathcal{X}'^{\wedge A} \times_S U), K_{E\otimes\xi})
\end{tikzcd}$$

En passant à la colimite sur $\mathcal{X}'$, on obtient d'après le corollaire 2.2.4 une application

$$\tilde{P}_E \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(\mathcal{X}, K_E) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(G\backslash(\mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U), K_{E\otimes\xi}) \ .$$

Plus généralement, pour $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$, on en déduit une application fonctorielle :

$$\tilde{P}_E \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(\mathcal{X}, K_E) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(G\backslash_{\mathbf{L}}(\mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U), K_{E\otimes\xi}) \ .$$

Proposition 2.2.10 *La construction $\tilde{P}_E$ raffine la construction P_E, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(\mathcal{X}, K_E) \arrow[r, "\tilde{P}_E"] \arrow[dr, "P_E"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(G\backslash_{\mathbf{L}}(\mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U), K_{E\otimes\xi}) \arrow[d] \\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(\mathcal{X}, K_{E\otimes\xi}) \end{tikzcd}$$

où le morphisme de droite, pour $\mathcal{X} \in \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$, est induit par la diagonale de $\mathcal{X}$.

2.3 Compatibilité au changement de base

Dans cette section, on suppose que l'on s'est donné un morphisme de type fini $f\colon T \to S$ entre schémas réguliers.

Définition 2.3.1 *Soit F un fibré vectoriel sur S. On note $f^\star\colon K_F \to f_\star K_{f^\star F}$ le morphisme dans $Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$ induit par la construction de la définition 1.1.2. On note aussi $f^\star\colon f^\star K_F \to K_{f^\star F}$ le morphisme adjoint à ce morphisme.*

Proposition 2.3.2 *S'il existe un schéma régulier B tel que $f\colon T \to S$ soit un morphisme dans Sm/B, alors on a des isomorphismes :*

$$\mathbf{L}f^\star K_F \xrightarrow{\sim} f^\star K_F \underset{f^\star}{\xrightarrow{\sim}} K_{f^\star F}$$

dans $\mathcal{H}_\bullet(T)$.

Ces isomorphismes vallent en fait déjà dans la catégorie homotopique $\mathcal{H}_{\mathrm{s},\bullet}(T)$ (avant $\mathbf{A}^1$-localisation). Le résultat est évident si f est un morphisme lisse puisqu'alors $f^\star$ préserve les équivalences faibles (voir [10, Corollary 1.24, p. 104]) et on a tautologiquement $f^\star K_F \simeq K_{f^\star F}$ dans $Sm/T^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}_\bullet$.

Si le fibré F provient par image inverse d'un fibré vectoriel sur la base B, en utilisant la compatibilité à la composition des foncteurs $f^\star$ et $\mathbf{L}f^\star$ et le fait que l'énoncé de la proposition vaille pour $S \to B$ et $T \to B$, on peut l'obtenir pour $T \to S$.

Dans le cas général, il suffit de s'assurer que les morphismes $\mathbf{L}f^\star K_F \to f^\star K_F$ et $f^\star K_F \to K_{f^\star F}$ deviennent des équivalences faibles après restriction à des ouverts d'un recouvrement de T. Si U est un ouvert de S tel que $F_{|U}$ est trivial, les arguments précédents montrent que le résultat vaut après restriction à l'ouvert $f^{-1}(U)$ de T. Ceci fournit un recouvrement ouvert convenable.

Remarque 2.3.3 *Sous les hypothèses de la proposition précédente (avec $B = \mathrm{Spec}\, k$ et k un corps parfait), si F est un fibré de rang r, on a bien sûr un diagramme commutatif dans $\mathcal{H}_\bullet(T)$ énonçant la compatibilité au changement de base de l'isomorphisme de Thom :*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{L}f^\star K_F \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] & \mathbf{L}f^\star K_r \arrow[d, "\sim"] \\ K_{f^\star F} \arrow[r, "\sim"] & K_r \end{tikzcd}$$

(Les morphismes verticaux sont ceux de la définition 2.3.1 et les morphismes horizontaux proviennent de l'isomorphisme de Thom relatif appliqué aux fibrés F et $f^\star F$.)

Proposition 2.3.4 *Soit G un groupe fini. Soit A un G-ensemble fini de cardinal n. Soit U un G-torseur étale sur S. Soit E un fibré vectoriel sur S. Notons U_T et $f^\star E$ les données homologues définies sur T par changement de base par f. Notons $\tilde{P}_E$ et $\tilde{P}_{f^\star E}$ les opérations associées à ces* *données dans la sous-section 2.2. Alors, le diagramme suivant est commutatif pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(\mathcal{X}, K_E) \arrow[r, "\tilde{P}_E"] \arrow[d, "f^\star"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(G\backslash_{\mathbf{L}}(\mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U), K_{E\otimes\xi}) \arrow[d, "f^\star"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(T)}(\mathbf{L}f^\star\mathcal{X}, K_{f^\star E}) \arrow[r, "\tilde{P}_{f^\star E}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(T)}(G\backslash_{\mathbf{L}}((\mathbf{L}f^\star\mathcal{X})^{\wedge A} \times_T U_T), K_{f^\star E\otimes f^\star\xi})
\end{tikzcd}$$

Pour établir cette compatibilité, il suffit d'obtenir la commutativité du diagramme semblable où l'on aurait remplacé le Hom dans les catégories $\mathcal{H}_\bullet(S)$ et $\mathcal{H}_\bullet(T)$ par ceux dans les catégories de préfaisceaux simpliciaux pointés sur Sm/S et Sm/T et où $\mathcal{X}$ est un objet de $\Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$. En raisonnant degré par degré et par passage à la colimite, on se ramène à montrer la commutativité du diagramme suivant pour tout $X \in Sm/S$:

$$\begin{tikzcd}
K_E(X) \arrow[r, "\tilde{P}_E"] \arrow[d, "f^\star"] & K_{E\otimes\xi}(G\backslash(X^n \times_S U)) \arrow[d, "f^\star"] \\
K_{f^\star E}(X_T) \arrow[r, "\tilde{P}_{f^\star E}"] & K_{f^\star E\otimes f^\star\xi}(G\backslash(X_T^n \times_T U_T))
\end{tikzcd}$$

Cette compatibilité est triviale.

Remarque 2.3.5 *Dans le cas particulier où $f\colon T \to S$ est un morphisme dans Sm/k avec k un corps parfait, on peut récrire la compatibilité de la proposition 2.3.4 sous la forme du carré commutatif suivant (où on a noté r le rang de E), pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$:*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \arrow[r, "\tilde{P}_E"] \arrow[d, "f^\star"] & \widetilde{H}^{2rn,rn}(G\backslash_{\mathbf{L}}(\mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U)) \arrow[d, "f^\star"] \\
\widetilde{H}^{2r,r}(\mathbf{L}f^\star\mathcal{X}) \arrow[r, "\tilde{P}_{f^\star E}"] & \widetilde{H}^{2rn,rn}(G\backslash_{\mathbf{L}}((\mathbf{L}f^\star\mathcal{X})^{\wedge A} \times_T U_T))
\end{tikzcd}$$

Corollaire 2.3.6 *Avec les hypothèses et notations de la proposition 2.3.4, on a aussi le carré commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(\mathcal{X}, K_E) \arrow[r, "P_E"] \arrow[d, "f^\star"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(\mathcal{X}, K_{E\otimes\xi}) \arrow[d, "f^\star"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(T)}(\mathbf{L}f^\star\mathcal{X}, K_{f^\star E}) \arrow[r, "P_{f^\star E}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(T)}(\mathbf{L}f^\star\mathcal{X}, K_{f^\star E\otimes f^\star\xi})
\end{tikzcd}$$

Remarque 2.3.7 *Appliqué avec $\mathcal{X} = K_E$, ce corollaire énonce en particulier que le morphisme $P_E\colon K_E \to K_{E\otimes\xi}$ est envoyé sur le morphisme $P_{f^\star E}\colon K_{f^\star E} \to K_{f^\star E\otimes f^\otimes\xi}$ par le foncteur $\mathbf{L}f^\star\colon \mathcal{H}_\bullet(S) \to \mathcal{H}_\bullet(T)$.*

Corollaire 2.3.8 *Avec les hypothèses et notations de la proposition 2.3.4, et sous l'hypothèse supplémentaire que f est lisse, on a aussi le carré commutatif suivant, pour tout $\mathcal{Y} \in \mathcal{H}_\bullet(T)$:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(\mathbf{L}f_\sharp\mathcal{Y}, K_E) \arrow[r, "P_E"] \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(\mathbf{L}f_\sharp\mathcal{Y}, K_{E\otimes\xi}) \arrow[d, "\sim"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(T)}(\mathcal{Y}, K_{f^\star E}) \arrow[r, "P_{f^\star E}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(T)}(\mathcal{Y}, K_{f^\star E\otimes f^\star\xi})
\end{tikzcd}$$

Il suffit d'appliquer le corollaire 2.3.6 avec $\mathcal{X} = \mathbf{L}f_\sharp\mathcal{Y}$ et d'utiliser le morphisme d'adjonction $\mathcal{Y} \to f^\star\mathbf{L}f_\sharp\mathcal{Y}$.

2.4 Compatibilité aux classes de Thom

Proposition 2.4.1 *Soit F un fibré vectoriel sur S. On a un isomorphisme canonique dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$:*

$$G\backslash_{\mathbf{L}}(\mathrm{Th}_S F \times_S U) \simeq \mathrm{Th}_S(F \otimes \xi) \ .$$

Ceci résulte de [2, Example 5.2.8].

Ainsi, pour deux fibrés vectoriels E et F de rang r sur S, la construction $\tilde{P}_E$ définit une application :

$$\tilde{P}_E \colon \widetilde{H}^{2r,r}(\mathrm{Th}_S F) \to \widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathrm{Th}_S(F \otimes \xi))$$

Proposition 2.4.2 *On suppose donnés deux fibrés vectoriels de rang r sur S. On note $t_E \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathrm{Th}_S E)$ la classe de Thom de E. Compte tenu de l'identification ci-dessus, on a alors :*

$$\tilde{P}_E(t_F) = t_{F\otimes\xi} \in H^{2rn,rn}(\mathrm{Th}_S(F \otimes \xi)) \ .$$

Dans le cas où $E = F$, la démonstration est semblable à celle de la proposition 2.1.7. Dans le cas général, on peut observer que si S est connexe (cas auquel on peut se ramener), le groupe $\widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathrm{Th}_S(F \otimes \xi))$ dans lequel s'énonce l'égalité est canoniquement isomorphe à l'anneau de coefficients Λ, le générateur canonique étant donné par $t_{F\otimes\xi}$. Pour vérifier l'égalité, il est donc permis de remplacer S par un ouvert dense au-dessus duquel les deux fibrés E et F sont isomorphes (par exemple parce qu'ils seraient tous les deux triviaux).

Corollaire 2.4.3 *On suppose donnés deux fibrés vectoriels E et F de rang r sur S. On a alors :*

$$P_E(t_F) = \delta^\star t_{F\otimes\xi}$$

dans $\widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathrm{Th}_S(F))$ où $\delta \colon \mathrm{Th}_S F \to \mathrm{Th}_S(F \otimes \xi)$ est le morphisme induit par l'inclusion (admissible) $F \to F \otimes \xi$ de fibrés vectoriels déduite du sous-fibré vectoriel de rang 1 évident dans ξ.

Cela se déduit immédiatement de la proposition 2.4.2 et de la proposition 2.2.10.

Corollaire 2.4.4 *Soit E un fibré vectoriel de rang r sur S. Soit $X \in Sm/S$. Soit F un fibré vectoriel de rang r sur X.*

$$P_E(t_F) = \delta^\star t_{F\otimes\xi}$$

dans $\widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathrm{Th}_X(F))$ où $\delta \colon \mathrm{Th}_X F \to \mathrm{Th}_X(F \otimes \xi)$ est le morphisme induit par l'inclusion (admissible) $F \to F \otimes \xi$ de fibrés vectoriels déduite du sous-fibré vectoriel de rang 1 évident dans ξ.

La compatibilité au changement de base énoncée dans le corollaire 2.3.8 permet de supposer que $X = S$, ce qui nous ramène à l'énoncé du corollaire 2.4.3.

2.5 Indépendance en le fibré E

Proposition 2.5.1 *L'opération $\tilde{P}_E \colon \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \to \widetilde{H}^{2rn,rn}(G\backslash_{\mathbf{L}}(\mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U))$ ne dépend que du rang du fibré vectoriel E.*

Corollaire 2.5.2 *L'opération cohomologique $P_E \colon \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \to \widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathcal{X})$ ne dépend que du rang du fibré vectoriel E.*

Lemme 2.5.3 *Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux objets de $\Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$, le morphisme canonique*

$$G\backslash(\mathcal{X}^{\wedge A} \times U) \wedge G\backslash(\mathcal{Y}^{\wedge A} \times U) \to G\backslash((\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y})^{\wedge A} \times U)$$

est un isomorphisme dans $\Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$.

On peut se ramener au cas particulier où $\mathcal{X} = X_+$ et $\mathcal{Y} = Y_+$ avec X et Y des objets de Sm/S. Le lemme provient alors de l'isomorphisme suivant dans Sm/S :

$$G\backslash(X^A \times_S U) \times_S G\backslash(Y^A \times_S U) \xrightarrow{\sim} G\backslash(X^A \times Y^A \times U)\ .$$

Cet isomorphisme peut se vérifier localement sur S pour la topologie étale. On peut donc supposer que U est le G-torseur trivial, auquel cas le morphisme est isomorphe à l'identité de $X^A \times Y^A$.

Lemme 2.5.4 *On suppose que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux objets de $\Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$ et que E et F sont des fibrés vectoriels de rangs respectifs r et s sur S. Alors, le diagramme évident qui suit est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \times \widetilde{H}^{2s,s}(\mathcal{Y}) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\tilde{P}_E \times \tilde{P}_F"] & \widetilde{H}^{2(r+s),r+s}(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}) \arrow[d, "\tilde{P}_{E\oplus F}"] \\
\widetilde{H}^{2rn,rn}(G\backslash(\mathcal{X}^{\wedge A} \times U)) \times \widetilde{H}^{2sn,sn}(G\backslash(\mathcal{Y}^{\wedge A} \times U)) \arrow[r, "\cup"] & \widetilde{H}^{2(r+s)n,(r+s)n}(G\backslash((\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y})^{\wedge A} \times U))
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des objets de $\mathcal{H}_\bullet(S)$, si $x \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X})$ et $y \in \widetilde{H}^{2s,s}(\mathcal{Y})$, alors on a une égalité :

$$\tilde{P}_E(x) \cdot \tilde{P}_F(y) = \tilde{P}_{E\oplus F}(x \cdot y)$$

dans $\widetilde{H}^{2(r+s)n,(r+s)n}(G\backslash((\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y})^{\wedge A} \times U))$, ou, ce qui revient au même, dans $\widetilde{H}^{2(r+s)n,(r+s)n}(G\backslash(\mathcal{X}^{\wedge A} \times U) \wedge G\backslash(\mathcal{Y}^{\wedge A} \times U))$.

C'est évident.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 2.5.1. Nous allons montrer que $\tilde{P}_E$ coïncide avec $\tilde{P}_{\mathscr{O}_S^r}$ où r est le rang de E. Quitte à utiliser l'astuce de Jouanolou, on peut supposer qu'il existe un fibré vectoriel E' et un entier N tel que $E \oplus E' \simeq \mathscr{O}_S^N$. Notons r et s les rangs respectifs de E et E'. Appliquons la formule du lemme précédent aux décompositions $\mathscr{O}_S^N = E \oplus E'$ et $\mathscr{O}_S^N = \mathscr{O}_S^r \oplus \mathscr{O}_S^s$. Ici, $\mathcal{X}$ est arbitraire, mais on pose $\mathcal{Y} = \mathrm{Th}_S\, E'$. Pour tout $x \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X})$, on a :

$$\tilde{P}_E(x) \cdot \tilde{P}_{E'}(t_{E'}) = \tilde{P}_{\mathscr{O}_S^N}(x \cdot t_{E'})) = \tilde{P}_{\mathscr{O}_S^r}(x) \cdot \tilde{P}_{\mathscr{O}_S^s}(t_{E'})$$

Or, on sait déjà que $\tilde{P}_{E'}(t_{E'}) = \tilde{P}_{\mathscr{O}_S^s}(t_{E'}) = t_{E'\otimes\xi}$ par la proposition 2.4.2. La multiplication par cette classe définissant un isomorphisme

$$\widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{Z} \wedge \mathrm{Th}_S(E' \otimes \xi))$$

pour tout $\mathcal{Z} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$, en particulier $\mathcal{Z} = G\backslash_{\mathbf{L}}(\mathcal{X}^{\wedge A} \times_S U)$, on peut simplifier l'identité $\tilde{P}_E(x) \cdot t_{E'\otimes\xi} = \tilde{P}_{\mathscr{O}_S^r}(x) \cdot t_{E'\otimes\xi}$ afin d'obtenir l'égalité $\tilde{P}_E(x) = \tilde{P}_{\mathscr{O}_S^r}(x)$ voulue.

3 Propriétés de l'opération totale

On fixe un corps parfait k. Dans cette section, on va s'intéresser plus spécifiquement aux opérations suivantes :

Définition 3.0.1 *Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini A de cardinal n. Soit $S \in Sm/k$ (on note $a_S \colon S \to \operatorname{Spec} k$ le morphisme structual). Soit U un G-torseur étale au-dessus de S. Soit $r \geq 0$. On note P le morphisme*

$$K_r \to a_{S\star} K_{\xi^r}$$

le morphisme déduit par adjonction de $P_E \colon K_E \to K_{E\otimes\xi}$ dans $Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}$ (cf. définition 2.1.3) dans le cas particulier où E est le fibré trivial de rang r sur S et ξ le fibré vectoriel sur S de la définition 2.1.1. (Quand le contexte l'exigera, on ajoutera implicitement à la notation P quelques indices pour préciser les données utilisées.) Ceci induit un morphisme $P \colon K_r \to \mathbf{R}a_{S\star}K_{\xi^r} \overset{Thom}{\simeq} \mathbf{R}a_{S\star}K_{rn} \simeq \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S, K_{rn})$ dans $\mathcal{H}_\bullet(k)$ qui correspond par adjonction à un morphisme $K_r \wedge S_+ \to K_{rn}$ dans $\mathcal{H}_\bullet(k)$ aussi noté P. On note encore $P \colon \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \to \widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathcal{X} \wedge S_+)$ l'opération induite pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$.

3.1 Fonctorialité en U et en G

Proposition 3.1.1 *Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini A de cardinal n. Soit $f\colon S' \to S$ un morphisme dans Sm/k. On suppose que S et S' sont munis respectivement de G-torseurs étales U' et U et qu'il existe un isomorphisme de G-torseurs $f^\star U \simeq U'$.*

Alors, le diagramme suivant est commutatif pour tout $r \geq 0$ et $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \arrow[r, "P_U"] \arrow[dr, "P_V"'] & \widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathcal{X} \wedge S_+) \arrow[d, "f^\star"] \\ & \widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathcal{X} \wedge S'_+) \end{tikzcd}$$

Ceci résulte essentiellement du corollaire 2.3.6.

Proposition 3.1.2 *Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini A de cardinal n. Soit H un sous-groupe de G. Soit $S \in Sm/k$ un schéma muni d'un G-torseur étale U. On note $S' = H\backslash U$. On peut considérer aussi U comme un H-torseur étale au-dessus de S'. On note $p\colon S' \to S$ le morphisme évident. Alors, le diagramme suivant est commutatif pour tous $r \geq 0$ et $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$:*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \arrow[r, "P_G"] \arrow[dr, "P_H"'] & \widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathcal{X} \wedge S_+) \arrow[d, "p^\star"] \\ & \widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathcal{X} \wedge S'_+) \end{tikzcd}$$

Ceci résulte de l'évidente commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} K_r \arrow[r, "P_G"] \arrow[dr, "P_H"'] & a_{S\star}K_{\xi^r} \arrow[d] \\ & a_{S'\star}K_{\xi'^r} \end{tikzcd}$$

où $a_S\colon S \to \operatorname{Spec} k$ et $a_{S'}\colon S' \to \operatorname{Spec} k$ sont les morphismes structuraux, $\xi' = p^\star\xi$ et où le morphisme de droite s'identifie au morphisme $a_{S\star}K_{\xi^r} \to a_{S\star}p_\star K_{\xi'^r}$ obtenu à partir du morphisme d'adjonction $K_{\xi^r} \to p_\star p^\star K_{\xi^r} = p_\star K^{\xi'^r}$.

En combinant les propositions 3.1.1 et 3.1.2, on obtient la compatibilité plus générale :

Corollaire 3.1.3 *Soit $G' \to G$ un morphisme injectif de groupes[3]. On suppose que l'on s'est donné une action de G sur un ensemble fini A de cardinal n. Par restriction, A est également muni d'une action de G'. On suppose donnés un morphisme $f\colon S' \to S$ dans Sm/k, un G-torseur U sur S, un G'-torseur U' sur S' et un S-morphisme $U' \to U$ qui soit G'-équivariant. Autrement dit, on dispose d'un diagramme :*

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "G'\text{-équiv.}"] \arrow[d, "G'\text{-torseur}"'] & U \arrow[d, "G\text{-torseur}"] \\ S' \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

Alors, le diagramme suivant commute pour tous $r \geq 0$ et $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \arrow[r, "P_G"] \arrow[dr, "P_{G'}"'] & \widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathcal{X} \wedge S_+) \arrow[d, "f^\star"] \\ & \widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathcal{X} \wedge S'_+) \end{tikzcd}$$

[3]Si $G' \to G$ n'est pas injectif, la compatibilité est vraie aussi, mais elle ne fait que montrer que ce cas, et donc celui d'une action infidèle de G' sur A, n'est pas très intéressant.

On peut identifier le carré ci-dessus à une composition de deux carrés :

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "G'\text{-équiv.}"] \arrow[d, "G'\text{-torseur}"'] & U \arrow[r, equal, "G'\text{-équiv.}"] \arrow[d, "G'\text{-torseur}"'] & U \arrow[d, "G\text{-torseur}"] \\ S' \arrow[r] & G'\backslash U \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Pour établir la compatibilité énoncée dans le corollaire, on se ramène ainsi aux propositions 3.1.1 et 3.1.2 qui correspondent respectivement aux carrés de gauche et de droite.

3.2 Compatibilité à la multiplication

Proposition 3.2.1 *Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini A de cardinal n. Soit $S \in Sm/k$ un schéma muni d'un G-torseur U. On note P_G l'opération associée $\widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \to \widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathcal{X} \wedge S_+)$ pour $r \geq 0$ et $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$. Pour tous $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$, $\mathcal{Y} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$, $r, s \geq 0$, $x \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X})$, $y \in \widetilde{H}^{2s,s}(\mathcal{Y})$, on a l'identité suivante dans $\widetilde{H}^{2(r+s),r+s}(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} \wedge S_+)$:*

$$P_G(x \cdot y) = \Delta^\star(P_G(x) \cdot P_G(y))$$

où $\Delta \colon \mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} \wedge S_+ \to (\mathcal{X} \wedge S_+) \wedge (\mathcal{Y} \wedge S_+)$ est le morphisme canonique provenant de la diagonale de S.

Ceci résulte trivialement de la proposition 2.1.4.
(Plus loin, on se dispensera d'écrire $\Delta^\star$ pour ne pas alourdir les notations.)

3.3 Action sur les classes de Thom

Proposition 3.3.1 *Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini A de cardinal n. Soit $S \in Sm/k$ un schéma muni d'un G-torseur U. On note P_G l'opération associée $\widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \to \widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathcal{X} \wedge S_+)$ pour $r \geq 0$ et $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$.*

Soit $X \in Sm/k$. Soit F un fibré vectoriel de rang r sur X. On note $t_F \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathrm{Th}_X F)$ la classe de Thom de F. Alors,

$$P_G(t_F) = t_F \cdot c_{r(n-1)}(F \boxtimes (\xi/\mathscr{O})) \in \widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathrm{Th}_X F \wedge S_+)\,.$$

En particulier, si F est le fibré trivial de rang r, on a : $P(t_F) = t_F \cdot c_{n-1}(\xi)^r$.

D'après le corollaire 2.4.4, $P(t_F)$ s'identifie à l'image inverse de $t_{F\boxtimes\xi}$ par le morphisme

$$\mathrm{Th}_X F \wedge S_+ \simeq \mathrm{Th}_{X\times S}(F \boxtimes \mathscr{O}) \to \mathrm{Th}_{X\times S}(F \boxtimes \xi)$$

associé à l'inclusion $F \boxtimes \mathscr{O} \to F \boxtimes \xi$ de fibrés vectoriels sur $X \times S$ déduite du sous-fibré trivial de rang 1 évident dans ξ. La formule de la proposition résulte donc du lemme suivant :

Lemme 3.3.2 *Soit $i \colon E \to F$ un monomorphisme admissible entre fibrés vectoriels sur $X \in Sm/k$. Cette inclusion i induit un morphisme $\mathrm{Th}\, i \colon \mathrm{Th}_X E \to \mathrm{Th}_X F$.*

Alors, dans $\widetilde{H}^{\star,\star}(\mathrm{Th}_X E)$, on a l'identité

$$(\mathrm{Th}\, i)^\star(t_F) = t_E \cdot c_r(F/E)$$

où r est le rang de F/E et $(\mathrm{Th}\, i)^\star$ le morphisme de restriction $\widetilde{H}^{\star,\star}(\mathrm{Th}_X F) \to \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathrm{Th}_X E)$.

Les classes t_E et t_F peuvent être identifiées respectivement à des éléments de $H^{\star,\star}(\mathbf{P}(F \oplus \mathscr{O}_X))$ et de $H^{\star,\star}(\mathbf{P}(E \oplus \mathscr{O}_X))$. On note $\xi = c_1(\mathscr{O}(1))$ la première classe de Chern du fibré en droites fondamental de ces deux fibrés projectifs. Notons e le rang de E. La multiplicativité des polynômes de Chern de E et de F/E fait que dans $H^{\star,\star}(\mathbf{P}(F\oplus\mathscr{O}_X))$, on a :

$$t_F=(\xi^e+c_1(E)\xi^{e-1}+\cdots+c_e(E))\cdot(\xi^r+c_1(F/E)\xi^{r-1}+\cdots+c_r(F/E))$$

En appliquant $(\mathrm{Th}\,i)^\star$, on obtient une égalité dans $H^{\star,\star}(\mathbf{P}(E\oplus\mathscr{O}_X))$:

$$(\mathrm{Th}\,i)^\star(t_F)=(t_E\xi)\cdot(\xi^{r-1}+c_1(F/E)\xi^{r-2}+\cdots+c_{r-1}(F/E))+t_E\cdot c_r(F/E)\,.$$

On peut conclure en utilisant que $t_E\xi=\xi^{e+1}+c_1(E)\xi^e+\cdots+c_r(E)\xi=0\in H^{\star,\star}(\mathbf{P}(E\oplus\mathscr{O}_X))$, fait qui résulte par exemple de la définition des classes de Chern de $E\oplus\mathscr{O}_X$ et de l'identité $c_i(E\oplus\mathscr{O}_X)=c_i(E)$ pour tout $i\geq 0$.

3.4 Cas du classifiant $\mathbf{B}_{\text{ét}}G$

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini A à n éléments. On va montrer ici que, cette action de G étant fixée, les opérations P associées aux différents G-torseurs U sur $S\in Sm/k$ se déduisent toutes d'une opération universelle au niveau du classifiant étale $\mathbf{B}_{\text{ét}}G$ (cf. [10, p. 130]).

On rappelle que cet objet $\mathbf{B}_{\text{ét}}G\in\mathcal{H}_{\mathrm{s},\bullet}(S)$ a la vertu que pour tout préfaisceau simplicial $\mathcal{X}$ sur Sm/k, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{\mathrm{s}}(k)}(\mathcal{X},\mathbf{B}_{\text{ét}}G)\simeq H^1_{\text{ét}}(a_{\text{ét}}\mathcal{X},G)$ où $H^1_{\text{ét}}(a_{\text{ét}}\mathcal{X},G)$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphismes de G-torseurs étales au-dessus du faisceau (simplicial) étale $a_{\text{ét}}\mathcal{X}$ associé à $\mathcal{X}$. (Dans le cas favorable où l'ordre de G est inversible dans k, on a une bijection $H^1_{\text{ét}}(X,G)\simeq H^1_{\text{ét}}(\mathbf{A}^1\times X,G)$ pour tout $X\in Sm/S$ et l'objet $\mathbf{B}_{\text{ét}}G$ est $\mathbf{A}^1$-local (cf. [10, Proposition 4.1, p. 137]), ce qui permet de remplacer ci-dessus les Hom dans la catégorie $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}(k)$ par ceux dans la catégorie $\mathcal{H}(k)$.)

Dans cette sous-section, on identifiera un k-espace vectoriel de dimension finie W à l'espace affine $\mathrm{Spec}\,\mathbf{S}^\star W^\vee$ qui lui est associé ($\mathbf{S}^\star W^\vee$ est l'algèbre symétrique du dual de W). La représentation régulière de G est notée $k[G]$. Pour tout $d\geq 1$, on peut ainsi noter U_d l'ouvert (dense) de l'espace affine $k[G]^{\oplus d}$ sur lequel G agit librement. On définit le schéma $S_d=G\backslash U_d$ qui est muni du G-torseur étale U_d. En utilisant les injections évidentes $k[G]^d\to k[G]^{d+1}$, on fait des U_d et S_d un système inductif pour $d\geq 1$. Les colimites U_∞ et S_∞ de ces systèmes, calculées dans la catégorie des préfaisceaux sur Sm/k sont notées respectivement $\mathbf{E}_{\mathrm{gm}}G$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{gm}}G$. Bien entendu, $\mathbf{E}_{\mathrm{gm}}G$ est un G-torseur étale au-dessus de $\mathbf{B}_{\mathrm{gm}}G$ et la propriété caractéristique de $\mathbf{B}_{\text{ét}}G$ énoncée plus haut associe à ce G-torseur $\mathbf{E}_{\mathrm{gm}}G$ un morphisme canonique $\mathbf{B}_{\mathrm{gm}}G\to\mathbf{B}_{\text{ét}}G$ dans $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}(k)$.

Théorème 3.4.1 ([10, Proposition 2.6, p. 135]) *Le morphisme canonique $\mathbf{B}_{gm}G\to\mathbf{B}_{ét}G$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible. Autrement dit, dans $\mathcal{H}(k)$, on a un isomorphisme $\mathbf{B}_{gm}G\simeq\mathbf{B}_{ét}G$.*

Pour tout $d\geq 1$, on peut appliquer la construction de la définition 3.0.1 à l'action de G sur A et le G-torseur étale U_d sur S_d, ce qui fournit pour tout $r\geq 0$, un morphisme dans $\mathcal{H}(k)$:

$$P_{G,d}\colon K_r\to\mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S_d,K_{rn})\,.$$

D'après la proposition 3.1.1, ces morphismes sont compatibles avec les morphismes de transition du système inductif $(S_d)_{d\geq 1}$. Il existe donc un morphisme $K_r\to\mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\mathrm{gm}}G,K_{rn})$ qui induise tous les morphismes $P_{G,d}$ après composition des $\mathbf{R}\,\mathbf{Hom}$ par les différents morphismes évidents $S_d\to\mathbf{B}_{\mathrm{gm}}G$ (cela résulte de la suite exacte de Milnor, cf. [4, Proposition 2.15, Chapter VI]). Compte tenu de l'isomorphisme $\mathbf{B}_{\mathrm{gm}}G\simeq\mathbf{B}_{\text{ét}}G$ dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$, ceci permet de procéder à la définition suivante :

Définition 3.4.2 *Pour tout $r\geq 0$, on choisit un morphisme $P_G^{\mathrm{univ}}\colon K_r\to\mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{ét}G,K_{rn})$ dans $\mathcal{H}(S)$ tel que pour tout $d\geq 1$, $P_{G,d}$ soit le composé $K_r\xrightarrow{P_G^{\mathrm{univ}}}\mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{ét}G,K_{rn})\xrightarrow{[U_d]^\star}\mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S_d,K_{rn})$.*

Proposition 3.4.3 *Soit $S \in Sm/k$. Soit U un G-torseur étale sur S. À la classe du G-torseur U correspond un morphisme $[U]\colon S \to \mathbf{B}_{ét}G$ dans $\mathcal{H}_s(k)$. Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} K_r \arrow[r, "P_G^{\mathrm{univ}}"] \arrow[dr, "P_{G,U}"'] & \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{ét}G, K_{rn}) \arrow[d, "{[U]^\star}"] \\ & \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S, K_{rn}) \end{tikzcd}$$

La propriété énoncée est vraie par définition de P_G^{univ} dans le cas des G-torseurs U_d sur S_d pour tout $d \geq 1$. Si U est l'image inverse de U_d par un morphisme $f\colon S \to S_d$ dans Sm/k, on déduit la compatibilité pour S de celle pour S_d en utilisant la commutativité des deux triangles dans le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} K_r \arrow[r, "P_G^{\mathrm{univ}}"] \arrow[dr, "P_{G,U_d}"] \arrow[ddr, "P_{G,U}"'] & \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\text{ét}}G, K_{rn}) \arrow[d, "{[U_d]^\star}"] \\ & \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S_d, K_{rn}) \arrow[d, "f^\star"] \\ & \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S, K_{rn}) \end{tikzcd}$$

Le triangle du haut commute parce que c'est le cas du torseur U_d sur S_d et celui du bas d'après la proposition 3.1.1.

Pour traiter le cas d'un G-torseur arbitraire U sur $S \in Sm/k$, on peut commencer par supposer que S est affine en utilisant l'astuce de Jouanolou (cf. [8, Lemme 1.5] et [22, Proposition 4.4]). Le lemme suivant montre que l'on est alors dans le cas traité ci-dessus :

Lemme 3.4.4 *Soit S un k-schéma affine de type fini. Soit U un G-torseur étale sur S. Alors, il existe un entier $d \geq 1$ et un morphisme G-équivariant $U \xrightarrow{\tilde{f}} U_d$. Ainsi, le G-torseur U s'identifie à l'image inverse de U_d par le morphisme $f\colon S \to S_d$ induit par $\tilde{f}$ par passage au quotient par G. (On peut en outre s'arranger pour que f et $\tilde{f}$ soient des immersions fermées.)*

Notons A l'anneau du schéma affine U. Comme A est une k-algèbre de type fini, il existe un sous-k-espace vectoriel de dimension finie W de A tel que le morphisme d'algèbres $\mathbf{S}^\star W \to A$ associé soit surjectif. L'action à gauche de G sur U se traduit en une action à droite de G sur A. Quitte à remplacer W par $\sum_{g\in G} g^\star W$, on peut supposer que $W \subset A$ est stable par l'action de G. Comme module à droite sur $k[G]$, W est évidemment de type fini, il existe donc un morphisme surjectif $k[G]^d \to W$ de modules à droites sur $k[G]$. Ceci induit un morphisme surjectif et G-équivariant de k-algèbres :

$$\mathbf{S}^\star(k[G]^d) \to A\,.$$

Géométriquement, compte tenu de l'autodualité de la représentation régulière, cela correspond à une immersion fermée G-équivariante $U \to k[G]^{\oplus d}$. Compte tenu de cela, le fait que l'action de G sur U soit libre implique que l'immersion fermée $W \to k[G]^d$ se factorise par l'ouvert U_d. On a ainsi construit le morphisme voulu $\tilde{f}\colon U \to U_d$.

On introduit ici une notion *ad hoc* qui nous sera utile plus loin :

Définition 3.4.5 *On suppose donnés deux objets $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{H}(k)$ et un objet $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{H}_s(k)$ (qui induit donc aussi un objet de $\mathcal{H}(k)$). On dira de deux morphismes $\mathcal{X} \to \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ qu'ils sont presqu'égaux si pour tout $Y \in Sm/k$ et tout morphisme $Y \to \mathcal{Y}$ dans $\mathcal{H}_s(k)$, les morphismes composés dans $\mathcal{H}(k)$*

$$\mathcal{X} \to \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \to \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(Y, \mathcal{Z})$$

sont égaux.

On s'intéresse tout particulièrement ici à cette définition dans le cas où $\mathcal{Y} = \mathbf{B}_{\text{ét}}G$. Dans ce cas, deux morphismes $\mathcal{X} \to \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\text{ét}}G, \mathcal{Z})$ sont presqu'égaux si pour tout $S \in Sm/k$ et tout G-torseur U sur S, les morphismes composés

$$\mathcal{X} \to \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\text{ét}}G, \mathcal{Z}) \xrightarrow{[U]^\star} \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S, \mathcal{Z})$$

sont égaux.

La proposition 3.4.3 montre que le choix du morphisme $P_G^{\text{univ}} \colon K_r \to \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\text{ét}}G, K_{rn})$ correspond exactement au choix d'un représentant dans une classe de morphismes à presqu'égalité près, les morphismes composés $K_r \to \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S, K_{rn})$ étant en effet imposés pour chaque G-torseur U sur S.

À partir de cette presqu'égalité de morphismes, on peut introduire une notion évidente de diagramme « presque commutatif » dont on fait usage dans la proposition suivante :

Proposition 3.4.6 *Soit $i \colon H \to G$ un morphisme injectif de groupes. Le G-ensemble A est muni par restriction d'une structure de H-ensemble. Par la définition 3.4.2, on dispose ainsi non seulement d'un morphisme P_G^{univ} mais aussi d'un morphisme P_H^{univ}, et ils font presque commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} K_r \arrow[r, "P_G^{\text{univ}}"] \arrow[dr, "P_H^{\text{univ}}"'] & \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\acute{e}t}G, K_{rn}) \arrow[d, "(\mathbf{B}_{\acute{e}t}i)^\star"] \\ & \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\acute{e}t}H, K_{rn}) \end{tikzcd}$$

Soit U un H-torseur sur $S \in Sm/k$. La classe du H-torseur U définit un morphisme $S \xrightarrow{[U]} \mathbf{B}_{\text{ét}}H$. Par la fonctorialité sur les torseurs, le morphisme composé $S \xrightarrow{[U]} \mathbf{B}_{\text{ét}}H \to \mathbf{B}_{\text{ét}}G$ correspond au G-torseur défini comme le quotient de $G \times U$ par l'action de H sur $G \times U$ donné par $h.(g,u) = (gh^{-1}, hu)$, ce quotient étant muni de l'action à gauche donnée par la multiplication à gauche dans G.

Après composition avec $[U]^\star \colon \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\text{ét}}H, K_{rn}) \to \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S, K_{rn})$, les deux morphismes dont on doit montrer la presqu'égalité deviennent deux morphismes $K_r \to \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S, K_{rn})$. Ce sont deux cas particuliers de la construction P pour des torseurs sur S : l'un pour le H-torseur U, l'autre pour le G-torseur $(G \times U)/H$ défini ci-dessus. L'égalité de ces deux morphismes découle du corollaire 3.1.3 appliqué au diagramme H-équivariant évident :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "u \mapsto (1,u)"] \arrow[d, "H\text{-torseur}"'] & (G \times U)/H \arrow[d, "G\text{-torseur}"] \\ S \arrow[r, equal] & S \end{tikzcd}$$

Remarque 3.4.7 *Il est vraisemblablement possible de se débarasser des « presque » apparaissant ci-dessus et de définir le morphisme $P_G^{\text{univ}} \colon K_r \to \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\acute{e}t}G, K_{rn})$ sans équivoque. Pour cela, il suffirait d'obtenir une version convenable de l'isomorphisme de Thom (cf. proposition 1.5.2) pour une famille compatible de fibrés vectoriels sur un diagramme de schéma (dont la colimite serait $\mathbf{B}_{gm}G$). Ceci ne présente pas un intérêt décisif puisque dans le cas le plus intéressant du groupe symétrique $\mathfrak{S}_\ell$ et de $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, le $\lim^1$ mesurant l'obstruction à l'unicité est nul.*

3.5 Théorème de symétrie

Théorème 3.5.1 *Soit G un groupe agissant sur un ensemble A à n éléments. Soit $S \in Sm/k$ un schéma muni d'un G-torseur U. Pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$, pour tout $u \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X})$, on peut considérer $P_G(u) \in \widetilde{H}^{2rn,rn}(\mathcal{X} \wedge S_+)$ puis $P_G(P_G(u)) \in \widetilde{H}^{2rn^2,rn^2}(\mathcal{X} \wedge (S \times S)_+)$. Si on note $\tau \colon S \times S \to S \times S$ l'échange des deux facteurs et $\tau^\star$ son action sur $\widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge (S \times S)_+)$, on a :*

$$\tau^\star(P_G(P_G(u)) = P_G(P_G(u))) \; .$$

La proposition suivante permet d'interpréter $P_G \circ P_G$ comme une seule construction P, appliquée au groupe $G \times G$, et ainsi de réduire le théorème 3.5.1 à une formule $\tau^\star \circ P_{G\times G} = P_{G\times G}$.

Proposition 3.5.2 *Outre une action d'un groupe fini G sur un ensemble A à n éléments, on se donne un groupe fini G' agissant sur un ensemble A' à n' éléments. Soit $S \in Sm/k$ un schéma muni d'un G-torseur U. Soit $S' \in Sm/k$ un schéma muni d'un G'-torseur U'. Il en résulte une manière évidente de considérer $U \times U'$ comme un $G \times G'$-torseur sur $S \times S'$ et $A \times A'$ comme un $G \times G'$-ensemble.*

Pour tout $r \geq 0$, le diagramme suivant est commutatif dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$:

$$\begin{tikzcd}
K_r \arrow[r, "P_H"] \arrow[d, "P_{G\times G'}"'] & \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S, K_{rn}) \arrow[d, "\mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S, P_{G'})"] \\
\mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S \times S', K_{rnn'}) \arrow[r, equal] & \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S, \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S', K_{rnn'}))
\end{tikzcd}$$

Cela résulte immédiatement de 2.1.5 et de la compatibilité des constructions P aux changements de base associés aux morphismes de projection $S \times S' \to S$ et $S \times S' \to S'$ (cf. corollaire 2.3.6).

Première démonstration du théorème 3.5.1 Observons que le diagramme suivant est commutatif dans $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}(k)$, où τ désigne l'échange des facteurs S ou G :

$$\begin{tikzcd}
S \times S \arrow[r, "{[U\times U]}"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathbf{B}_{\text{ét}}(G \times G) \arrow[d, "\mathbf{B}_{\text{ét}}\tau"] \\
S \times S \arrow[r, "{[U\times U]}"] & \mathbf{B}_{\text{ét}}(G \times G)
\end{tikzcd}$$

En effet, si on note $(U \times U)^\tau$ le $G \times G$-torseur déduit du $G \times G$-torseur $U \times U$ sur $S \times S$ par le changement de groupe associé au morphisme $\tau\colon G \times G \to G \times G$ (c'est-à-dire que le schéma sous-jacent à $(U \times U)^\tau$ est $U \times U$ et l'action est définie par la formule $(g, h).(u, v) = (hu, gv)$), alors le $G \times G$-torseur $(U \times U)^\tau$ s'identifie aussi à l'image inverse du $G \times G$-torseur $U \times U$ par $\tau\colon S \times S \to S \times S$. (L'isomorphisme entre les deux $G \times G$-torseurs est donné par l'échange des deux facteurs U.)

On en déduit que pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que le diagramme suivant est presque commutatif :

$$\begin{tikzcd}
K_r \arrow[r, "P^{\mathrm{univ}}_{G\times G}"] \arrow[dr, "P^{\mathrm{univ}}_{G\times G}"'] & \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\text{ét}}(G \times G), K_{rn^2}) \arrow[d, "\mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\tau, K_{rn^2})"] \\
& \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\text{ét}}(G \times G), K_{rn^2})
\end{tikzcd}$$

Notons $\widetilde{G \times G}$ le produit semi-direct $(G \times G) \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ où l'élément non trivial de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ agit par l'échange $\tau\colon G \times G \to G \times G$ des deux facteurs G. Notons $\tilde{\tau}$ l'automorphisme intérieur de $\widetilde{G \times G}$ donné par la conjugaison par l'élément non trivial de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \subset \widetilde{G \times G}$. Le diagramme de groupes suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & \widetilde{G \times G} \arrow[d, "\tilde{\tau}"] \\
G \times G \arrow[r] & \widetilde{G \times G}
\end{tikzcd}$$

Comme $\tilde{\tau}$ est un automorphisme intérieur, il induit l'identité sur $\mathbf{B}_{\text{ét}}(\widetilde{G \times G})$, d'où un diagramme commutatif dans $\mathcal{H}_{\text{s}}(k)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}_{\text{ét}}(G \times G) \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr] & \\
\mathbf{B}_{\text{ét}}(G \times G) \arrow[r] & \mathbf{B}_{\text{ét}}(\widetilde{G \times G})
\end{tikzcd}$$

Comme l'action de $G \times G$ sur $A \times A$ s'étend en une action de $\widetilde{G \times G}$ (en faisant agit l'élément non trivial de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \subset \widetilde{G \times G}$ par l'échange $\tau \colon A \times A \to A \times A$), on en déduit un diagramme presque commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\text{ét}}(G \times G), K_{rn^2}) \arrow[dd, "\mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\tau, K_{rn^2})"] \\
K_r \arrow[r, "P^{\text{univ}}_{\widetilde{G \times G}}"'] \arrow[urr, bend left, "P^{\text{univ}}_{G \times G}"] \arrow[drr, bend right, "P^{\text{univ}}_{G \times G}"'] & \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\text{ét}}(\widetilde{G \times G}), K_{rn^2}) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(\mathbf{B}_{\text{ét}}(G \times G), K_{rn^2})
\end{tikzcd}$$

La presque commutativité du contour externe est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 3.5.3 *La première démonstration est dans le même ordre d'idées que celle de [17, §7], mais utilise de façon un peu plus systématique les classifiants des groupes $G \times G$ et $\widetilde{G \times G}$. La version [17, Corollary 7.3] de la proposition 3.5.2 énonçait les hypothèses de façon peu claire. La compatibilité n'était obtenue qu'après multiplication par une certaine classe qui dans certains cas était simplifiable. On a obtenu cette compatibilité plus directement ici, et c'est là un des intérêts d'avoir introduit les opérations P au niveau d'espaces K_E associés à des fibrés vectoriels E arbitraires plutôt que dans le seul cas des fibrés triviaux qui donnent les modèles usuels des espaces d'Eilenberg-MacLane K_r.*

Deuxième démonstration du théorème 3.5.1 Le schéma $U \times U$ est considéré comme un $G \times G$-torseur sur $S \times S$ de la façon évidente. À chaque $G \times G$-ensemble X est associé un morphisme

$$P_X \colon K_r \to \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S \times S, K_{r \cdot \# X})$$

qui ne dépend bien évidemment que de la classe d'isomorphisme du $G \times G$-ensemble X.

Notons $A \times A$ le $G \times G$-ensemble évident et $(A \times A)^\tau$ le même ensemble $A \times A$ muni de l'action de $G \times G$ donnée par la formule $(g, h).(a, b) = (ha, gb)$. D'après le corollaire 3.1.3 appliqué aux morphismes d'échanges $\tau \colon G \times G \to G \times G$ et $\tau \colon U \times U \to U \times U$ (induisant $\tau \colon S \times S \to S \times S$), on obtient le diagramme suivant dans $\mathcal{H}_\bullet(k)$:

$$\begin{tikzcd}
K_r \arrow[r, "P_{A \times A}"] \arrow[dr, "P_{(A \times A)^\tau}"'] & \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S \times S, K_{rn^2}) \arrow[d, "\tau^\star"] \\
 & \mathbf{R}\,\mathbf{Hom}(S \times S, K_{rn^2})
\end{tikzcd}$$

Comme les $G \times G$-ensembles $A \times A$ et $(A \times A)^\tau$ sont isomorphes (*via* l'échange $\tau \colon A \times A \to A \times A$), on a $P_{A \times A} = P_{(A \times A)^\tau}$, ce qui fournit la compatibilité annoncée.

3.6 Annulation du Bockstein

Théorème 3.6.1 *Soit ℓ un nombre premier. Soit $S \in Sm/k$ un schéma muni d'un $\mathfrak{S}_\ell$-torseur U. On note P_ℓ l'opération en cohomologie à coefficients dans $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ associée à ce torseur et à l'action évidente de $\mathfrak{S}_\ell$ sur $\{1, \dots, \ell\}$. Alors, pour tous $r \geq 0$ et $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$, la composition suivante est nulle :*

$$\widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \xrightarrow{P_\ell} \widetilde{H}^{2r\ell,r\ell}(\mathcal{X} \wedge S_+) \xrightarrow{\beta} \widetilde{H}^{2r\ell+1,r\ell}(\mathcal{X} \wedge S_+)$$

où β est le Bockstein. Autrement dit, pour tout $u \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X})$, la classe $P_\ell(u)$ est dans l'image du morphisme évident $\widetilde{H}^{2r\ell,r\ell}(\mathcal{X} \wedge S_+, \mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}) \to \widetilde{H}^{2r\ell,r\ell}(\mathcal{X} \wedge S_+, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$

La démonstration du théorème [10, Theorem 8.4] contient des erreurs, en particulier il y a un problème d'exactitude à gauche dans la suite énoncée en [10, (8.2)]. La démonstration présentée ci-dessous suit peut-être plus fidèlement encore la démonstration originale de [14, §4, Chapter VII] dans le cadre classique. Pour ce faire, nous introduisons des complexes qui permettent de représenter les classes de cohomologie motivique par des cocycles.

Définition 3.6.2 *Soit $S \in Sm/k$. Soit K un objet de $\mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_S)$ (par exemple un objet $\mathcal{F}$ de $\mathbf{PST}_S$ identifié à un complexe concentré en degré 0). Pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$, on note $C(\mathcal{X}, K)$ le complexe simple (défini en termes de produits) du bicomplexe $C^{p,q}(\mathcal{X}, K) = K_{-q}(\mathcal{X}_p)$ où les différentielles qui incrémentent p sont définies par des sommes alternées de flèches induites par la structure simpliciale de $\mathcal{X}$ (et la structure de préfaisceau sur K) et où les différentielle qui incrémentent q sont induites par celles de K [4]. Ce complexe satisfaisant des fonctorialités évidentes par rapport à $\mathcal{X}$ et K, on peut noter $\widetilde{C}(\mathcal{X}, K)$ le noyau de l'épimorphisme scindé $C(\mathcal{X}, K) \to C(S, K)$ induit par le point-base de $\mathcal{X}$.*

Le foncteur $\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}} \colon Sm/S \to \mathbf{PST}_S$ donne naissance à un foncteur $\widetilde{\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}} \colon \mathrm{Sc}_\bullet/S \to \mathbf{PST}_S$ qui pour $X \in Sm/S$ est tel que $\widetilde{\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}}(X_+) = \mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$ et qui commute aux sommes directes. On étend ceci en un foncteur $\widetilde{\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}} \colon \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S \to \Delta^{\mathrm{opp}}\mathbf{PST}_S$. En utilisant la correspondance de Dold-Kan $\Delta^{\mathrm{opp}}\mathbf{PST}_S \simeq \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_S)$, on en déduit un foncteur $\widetilde{M} \colon \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S \to \mathrm{C}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_S)$: c'est le complexe normalisé associé au préfaisceau avec transferts simplicial $\widetilde{\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}}(\mathcal{X})$. On dispose d'une inclusion fonctorielle $\widetilde{M}(\mathcal{X}) \subset \widetilde{M}^{\mathrm{nn}}(\mathcal{X})$ où $\widetilde{M}^{\mathrm{nn}}(\mathcal{X})$ est le complexe dont les différentielles sont des sommes alternées de cofaces :

$$\widetilde{\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}}(\mathcal{X}_0) \xleftarrow{d_0^\star - d_1^\star} \widetilde{\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}}(\mathcal{X}_1) \xleftarrow{d_0^\star - d_1^\star + d_2^\star} \widetilde{\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}}(\mathcal{X}_2) \longleftarrow \cdots$$

La notation $\widetilde{M}$ est compatible avec celle de la proposition 1.3.2. On rappelle que d'après [4, Theorem 2.5 (3), Chapter III], l'inclusion $\widetilde{M}(\mathcal{X}) \subset \widetilde{M}^{\mathrm{nn}}(\mathcal{X})$ est une équivalence d'homotopie fonctorielle.

Avec ces notations, le complexe $\widetilde{C}(\mathcal{X}, K)$ n'est autre que le complexe d'homomorphismes dans la catégorie abélienne $\mathbf{PST}_S$ entre $\widetilde{M}^{\mathrm{nn}}(\mathcal{X})$ et K. On dispose donc, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, d'une bijection canonique :

$$H^n(\widetilde{C}(\mathcal{X}, K)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{K^-(\mathbf{PST}_S)}(\widetilde{M}^{\mathrm{nn}}(\mathcal{X}), K[n])$$

où $K^-(\mathbf{PST}_S)$ est la catégorie à homotopie près des complexes bornés supérieurement d'objets de $\mathbf{PST}_S$. Comme $\widetilde{M}^{\mathrm{nn}}(\mathcal{X})$ est formé d'objets projectifs, ce Hom dans $K^-(\mathbf{PST}_S)$ s'identifie à un Hom dans la catégorie dérivée de $\mathbf{PST}_S$. Retenons que l'on a défini des bijections pour tout $n \geq 0$:

$$H^n(\widetilde{C}(\mathcal{X}, K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_S)}(\widetilde{M}^{\mathrm{nn}}(\mathcal{X}), K[n])$$

[4] On a commis ici un petit abus de notations en faisant comme si on pouvait simplement évaluer les préfaisceaux avec transferts K_{-q} sur les objets $\mathcal{X}_p$ qui sont des sommes directes de faisceaux représentables. Cette notation cache en réalité un Hom dans la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur Sm/S.

En utilisant le foncteur évident $\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_S) \to DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)$ et l'adjonction entre $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)$ et $\mathcal{H}_\bullet(S)$ (cf. §1.3), on a en fait défini des applications

$$H^n(\widetilde{C}(\mathcal{X}, K)) \to \mathrm{Hom}_{DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(S)}(\widetilde{M}(\mathcal{X}), K[n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(\mathcal{X}, K(K[n])) \,.$$

Dans le cas particulier où $K = \widetilde{M}(\mathrm{Th}_S\, E) \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda$ (placé en degré 0) pour un fibré vectoriel E de rang r sur S, le complexe $\widetilde{C}(\mathcal{X}, K)$ sera noté $\widetilde{C}(\mathcal{X}, K_{E,\Lambda})$, auquel cas, compte tenu de l'isomorphisme de Thom relatif, la construction ci-dessus fournit une application de la forme suivante pour tout $n \geq 0$:

$$H^n(\widetilde{C}(\mathcal{X}, K_{E,\Lambda})) \to \widetilde{H}^{2r+n,r}(\mathcal{X}, \Lambda) \,.$$

Pour u un n-cocycle du complexe $C(\mathcal{X}, K_{E,\Lambda})$, on notera $[u]$ la classe de cohomologie associée dans $\widetilde{H}^{2r+n,r}(\mathcal{X}, \Lambda)$.

Le lemme suivant montre que toute classe de cohomologie motivique peut-être ainsi représentée par un cocycle :

Lemme 3.6.3 *Pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$ et $u \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}, \Lambda)$, il existe $\mathcal{X}' \in \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$, un isomorphisme $\mathcal{X} \simeq \mathcal{X}'$ dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$ et un 0-cocycle $u' \in C^0(\mathcal{X}, K_{r,\Lambda})$ tel que la classe $[u'] \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}', \Lambda)$ corresponde à u* via *l'isomorphisme $\mathcal{X} \simeq \mathcal{X}'$.*

Tout d'abord, remarquons une petite évidence. Supposons que u soit donné par un morphisme de préfaisceaux simpliciaux pointés $v\colon \mathcal{X} \to K_r$, alors l'action de v en dimension simpliciale 0 est décrite par un élément $v_0 \in K_r(\mathcal{X}_0)$ qui s'identifie à un 0-cocycle de $\widetilde{C}(\mathcal{X}, K_r)$ qui est évidemment tel que $u = [v_0]$. Il s'agit ici de se ramener à ce cas.

On sait déjà (cf. corollaire 2.2.4) que quitte à changer $\mathcal{X}$, on peut représenter le morphisme $\mathcal{X} \to K_r$ dans $\mathcal{H}_\bullet(S)$ par un morphisme de préfaisceaux simpliciaux pointés $\mathcal{X} \to \mathrm{Sing}\, K_r$. En utilisant une variante de l'adjonction [10, Proposition 3.14, p. 91], ce morphisme correspond à un morphisme de préfaiscaux $|\mathcal{X}|_{\mathbf{\Delta}^\bullet} \to K_r$. Il suffit alors de choisir pour $\mathcal{X}'$ une équivalence faible (simpliciale) $\mathcal{X}' \to |\mathcal{X}|_{\mathbf{\Delta}^\bullet}$ avec $\mathcal{X}' \in \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$.

Le lemme suivant permet de comprendre le calcul du Bockstein :

Lemme 3.6.4 *Soit $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{F}'' \to 0$ une suite exacte dans $\mathbf{PST}_S$. Soit $\mathcal{X} \in \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$. Alors, on a une suite exacte de complexes :*

$$0 \to \widetilde{C}(\mathcal{X}, \mathcal{F}') \to \widetilde{C}(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \to \widetilde{C}(\mathcal{X}, \mathcal{F}'') \to 0 \,.$$

Soit $u \in \widetilde{C}^n(\mathcal{X}, \mathcal{F}'')$ un n-cocycle. Il existe $\tilde{u} \in \widetilde{C}^n(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ un élément tel que $p(\tilde{u}) = u$. L'élément $d\tilde{u}$ de $\widetilde{C}^{n+1}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ est l'image d'un unique élément $v \in \widetilde{C}^{n+1}(\mathcal{X}, \mathcal{F}')$ qui vérifie $dv = 0$. Alors, la classe de v dans $H^{n+1}(\mathcal{X}, \mathcal{F}')$ ne dépend que de la classe de u dans $H^n(\mathcal{X}, \mathcal{F}'')$ et elle s'identifie, au signe près, à la classe induite par la composition suivante dans $\mathrm{D}_{\geq 0}(\mathbf{PST}_S)$:

$$\widetilde{M}^{\mathrm{nn}}(\mathcal{X}) \xrightarrow{u} \mathcal{F}''[n] \xrightarrow{\beta[n]} \mathcal{F}'[n+1]$$

où $\beta\colon \mathcal{F}'' \to \mathcal{F}'[1]$ correspond à l'extension $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$.

L'exactitude vient de ce que $\widetilde{M}^{\mathrm{nn}}(\mathcal{X})$ soit formé d'objets projectifs. Le reste n'est qu'un rappel d'algèbre homologique.

Nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme 3.6.5 *Soit $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$. Soit $u \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Alors, $\beta(Pu)$ appartient à l'image du transfert associé au revêtement étale $U \to S$:*

$$\mathrm{Tr}\colon \widetilde{H}^{2r\ell+1,r}(\mathcal{X} \wedge U_+, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to \widetilde{H}^{2r\ell+1,r}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \,.$$

D'après le lemme 3.6.3, on peut supposer que $\mathcal{X} \in \Delta^{\mathrm{opp}}\mathrm{Sc}_\bullet/S$ et que la classe de cohomologie est donnée par un 0-cocycle, c'est-à-dire un élément $u \in \widetilde{C}^0(\mathcal{X}, K_{r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}})$ tel que $du = 0$. L'élément u s'interprète comme un élément de $K_{r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}(\mathcal{X}_0)$. La classe $Pu \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(S)}(\mathcal{X}, K_{\xi^r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}})$ est représentée par le 0-cocycle $Pu \in C^0(\mathcal{X}, K_{\xi^r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}) = K_{\xi^r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}(\mathcal{X})$ obtenu en utilisant le morphisme de préfaisceaux $P\colon K_{r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \to K_{\xi^r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}$. Le lemme 3.6.4 permet de représenter βPu par un cocycle. Pour ce faire, on choisit $\tilde{u} \in C^0(\mathcal{X}, K_{r,\mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}})$ relevant u. On note $P\tilde{u} \in C^0(\mathcal{X}, K_{\xi^r,\mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}})$ l'image de $\tilde{u}$ par le morphisme $P\colon K_{r,\mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}} \to K_{\xi^r,\mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}}$ associé à l'anneau de coefficients $\mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}$.

Bien sûr, $P\tilde{u} \in C^0(\mathcal{X}, K_{\xi^r,\mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}})$ est un relèvement de $Pu \in C^0(\mathcal{X}, K_{\xi^r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}})$, mais il n'y a pas de raison pour que ce soit un 0-cocycle. Comme Pu est un 0-cocycle, il existe un unique $v \in C^1(\mathcal{X}, K_{\xi^r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}})$ tel que $dP\tilde{u} = \ell v$ dans $C^1(\mathcal{X}, K_{\xi^r,\mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}})$. Alors, v est un 1-cocycle tel que $[v] = \beta Pu$ dans $\widetilde{H}^{2r\ell+1,r\ell}$. Nous allons montrer que ce 1-cocycle est l'image par le transfert d'un 1-cocycle représentant une classe dans $\widetilde{H}^{2r\ell+1,r}(\mathcal{X} \wedge U_+, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$.

Soit $\mathcal{F} \in \mathbf{PST}_S$. Pour tout $X \in Sm/S$, on a une application

$$\pi_\star\colon \mathcal{F}(X \times_S U) \to \mathcal{F}(X)$$

donnée par l'action de la correspondance finie évidente de X dans $X \times_S U$ induite par le revêtement étale $X \times_S U \to X$ déduit de $U \to S$ par changement de base. Ceci défini un morphisme $\pi_\star\colon \pi_\star\pi^\star\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dans $\mathbf{PST}_S$. On dispose aussi d'un morphisme plus évident

$$\pi^\star\colon \mathcal{F} \to \pi_\star\pi^\star\mathcal{F}$$

(c'est un morphisme d'adjonction). Dans le cas où $\mathcal{F} = K_{\xi^r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}$ (ou $K_{r\ell,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}$ si on préfère), le morphisme $\pi_\star\colon \pi_\star\pi^\star\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ induit le transfert dont il est question dans l'énoncé du lemme :

$$\widetilde{H}^{2r\ell+\star,r}(\mathcal{X} \wedge U_+, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to \widetilde{H}^{2r\ell+\star,r}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})\,.$$

Pour établir le lemme, il va donc être suffisant de montrer que le 1-cocycle v de $\widetilde{C}(\mathcal{X}, K_{\xi^r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}})$ représentant βPu est l'image d'un 1-cocycle par le morphisme de complexes induit par $\pi_\star$:

$$\mathrm{Tr}\colon \widetilde{C}(\mathcal{X}, \pi_\star K_{\pi^\star\xi^r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}) \to \widetilde{C}(\mathcal{X}, K_{\xi^r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}})\,.$$

Observons que l'on dispose d'un isomorphisme canonique de fibrés vectoriels $\pi^\star E^\ell \simeq \pi^\star\xi^r$ où E est le fibré trivial de rang r sur S. Nous noterons tw cet isomorphisme. Nous allons en réalité montrer que v est l'image d'un 1-cocycle de $\widetilde{C}(\mathcal{X}, K_{E^\ell,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}})$ *via* la composition suivante :

$$K_{E^\ell,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \xrightarrow{\pi^\star} \pi_\star K_{\pi^\star E^\ell,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \xrightarrow[\sim]{tw} \pi_\star K_{\pi^\star\xi^r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \xrightarrow{\pi_\star} K_{\xi^r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}\ .$$

Notons w l'unique élément de $K_{r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}(\mathcal{X}_1)$ tel que $d\tilde{u} = d_0^\star\tilde{u} - d_1^\star\tilde{u} = \ell w \in C^1(\mathcal{X}, K_{r,\mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}})$ (ceci est possible puisque $d\tilde{u}$ est congru modulo ℓ à du qui est nul). Comme $dd\tilde{u} = 0$, il vient que $\ell dw = 0$ dans $C^2(\mathcal{X}, K_{r,\mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}})$, d'où $dw = 0$ dans $C^2(\mathcal{X}, K_{r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}})$. On a ainsi un 1-cocycle w du complexe $\widetilde{C}(\mathcal{X}, K_{r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}})$.

Si $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ sont des éléments de $K_{E,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}(\mathcal{X}_i)$ pour un certain $i \geq 0$, on notera $a_1a_2\ldots a_\ell \in K_{E^\ell,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}(\mathcal{X}_i)$ l'image du ℓ-uplet qu'ils forment par le morphisme de préfaisceaux « produit » $K_{E,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \times \cdots \times K_{E,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \to K_{E^\ell,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}$.

Notons $u' = d_0^\star u = d_1^\star u \in K_{E,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}(\mathcal{X}_1)$. On peut former le produit $\gamma = u'^{\ell-1}w \in K_{E^\ell,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}(\mathcal{X}_1)$. J'affirme que γ est un 1-cocycle de $\widetilde{C}(\mathcal{X}, K_{E^\ell,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}})$. En effet, si on note $u'' = d_0^\star u' = d_1^\star u' = d_2^\star u' \in K_{E^\ell,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}(\mathcal{X}_2)$, on a :

$$\begin{aligned} d\gamma &= d_0^\star\gamma - d_1^\star\gamma + d_2^\star\gamma \\ &= u''^{\ell-1}(d_0^\star w - d_1^\star w + d_2^\star w) \\ &= u''^{\ell-1}dw = 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, dans $\widetilde{C}^1(\mathcal{X}, K_{\xi^r,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}})$, on a $\ell v = dP\tilde{u} = d_0^\star P\tilde{u} - d_1^\star P\tilde{u} = Pd_0^\star\tilde{u} - Pd_1^\star\tilde{u}$. Comme $d_0^\star\tilde{u} = d_1^\star\tilde{u} + \ell w$, le lemme suivant permet d'affirmer que :

$$\ell v = Pd_0^\star\tilde{u} - Pd_1^\star\tilde{u} = P(d_1^\star\tilde{u} + \ell w) - P(d_1^\star\tilde{u}) = \ell \cdot \left(\frac{1}{(\ell-1)!}\pi_\star \mathrm{tw}\pi^\star\gamma\right) .$$

Ceci permet de conclure que $v = \frac{1}{(\ell-1)!}\pi_\star\mathrm{tw}\pi^\star\gamma$. Pour achever la démonstration du lemme 3.6.5, il nous faut établir le lemme suivant :

Lemme 3.6.6 *Soit $X \in Sm/S$. Soit $\tilde{a} \in K_{E,\mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}}(X)$. Soit $b \in K_{E,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}$. On note a l'image de $\tilde{a}$ dans $K_{E,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}(X)$. Alors, dans $K_{E,\mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}}(X)$, on a l'égalité :*

$$P(\tilde{a} + \ell b) - P(\tilde{a}) = \ell \cdot \left(\frac{1}{(\ell-1)!}\pi_\star\mathrm{tw}\pi^\star(a^{\ell-1}b)\right)$$

On note encore $\tilde{a}$ un représentant de $\tilde{a}$ dans $c_{\mathrm{equi}}(X \times_S E/X, 0) \otimes \mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}$ et de même pour $b \in c_{\mathrm{equi}}(X \times_S E/X, 0) \otimes \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$. Par construction, $P(\tilde{a} + \ell b) \in c_{\mathrm{equi}}(X \times_S (E \otimes \xi)/X, 0) \otimes \mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}$ est l'unique élément qui vérifie

$$\pi_\xi^\star P(\tilde{a} + \ell b) = \mathrm{tw}\pi^\star((\tilde{a} + \ell b)^\ell) = \pi_\xi^\star P(\tilde{a}) + \ell\mathrm{tw}\pi^\star\left(\sum_{i=0}^{\ell-1} a^i b a^{\ell-1-i}\right)$$

Pour lever toute ambiguité, dans cette identité interviennent deux morphismes évidents $\pi\colon X \times_S E^\ell \times_S U \to X \times_S E^\ell$ et $\pi_\xi\colon X \times_S \xi^r \times_S U \to X \times_S \xi^r$ qui étaient jusqu'ici tous les deux notés π.

Pour conclure, on utilise l'identité suivante dans $c_{\mathrm{equi}}(X \times_S (E \otimes \xi)/X, 0) \otimes \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ qui résulte du calcul standard de la composition $\pi_\xi^\star\pi_{\xi\star}$ au niveau des cycles pour une projection π_ξ d'un $\mathfrak{S}_\ell$-torseur étale :

$$\pi_\xi^\star\pi_{\xi\star}(\mathrm{tw}\pi^\star(a^{\ell-1}b)) = (\ell-1)! \cdot \mathrm{tw}\pi^\star\left(\sum_{i=0}^{\ell-1} a^i b a^{l-1-i}\right) .$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 3.6.1. D'après les considérations du §3.4 (notamment le lemme 3.4.4), on peut supposer que S est l'un des schémas S_d définis au début du §3.4 (ils forment un système inductif dont la colimite s'identifie à $\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell$) et que U est le $\mathfrak{S}_\ell$-torseur U_d sur S_d défini au même endroit.

Notons $P_{\ell,d}\colon \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \to \widetilde{H}^{2r\ell,r\ell}(\mathcal{X} \wedge S_{d+})$ les différentes opérations P_ℓ associées à ces $\mathfrak{S}_\ell$-torseurs U_d sur S_d pour $d \geq 1$. Il s'agit de montrer que $\beta P_{\ell,d}(x) = 0$ pour tout $d \geq 1$. On sait d'une part que les classes $\beta P_{\ell,d}(x)$ forment un système compatible pour $d \geq 1$ et d'autre part que pour tout $e \geq 1$, il existe $\tilde{x}_e \in \widetilde{H}^{2r\ell,r\ell}(\mathcal{X} \wedge U_{e+})$ tel que $\beta P_{\ell,e}(x)$ soit l'image de $\tilde{x}_e$ par le transfert (c'est le lemme 3.6.5). Ainsi, pour $e \geq d \geq 1$, il vient que la classe $\beta P_{\ell,d}(x)$ est dans l'image de

$$\widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge U_{e+}) \to \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge U_{d+}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge S_{d+}) .$$

Fixons $d \geq 1$. J'affirme que cette composition est nulle pour e assez grand. Cela résulte formellement de l'annulation de la composition suivante dans $DM_-^{\mathrm{eff}}(k, \mathbf{F}_\ell)$ pour e assez grand :

$$M(S_d) \xrightarrow{Tr} M(U_d) \to M(U_e) .$$

Justifions ceci. $M(S_d)$ étant un objet « compact » de $DM_-^{\mathrm{eff}}(k, \mathbf{F}_\ell)$, pour montrer l'annulation de la composition pour e assez grand, il suffit de montrer que la composition s'annule si on remplace $M(U_e)$ par la colimite de ce système pour $e \geq d$, qui est le motif unité $\mathbf{F}_\ell$ (cf. proposition A.1). Que la composition

$$M(S_d) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} M(U_d) \to \mathbf{F}_\ell$$

soit nulle provient du fait que la classe $1 \in H^{0,0}(U_d)$ s'envoie par le transfert dans $H^{0,0}(S_d)$ sur la classe modulo ℓ du degré $U_d \to S_d$ qui vaut $l!$.

3.7 Comparaison avec la construction de Voevodsky

Nous allons expliquer brièvement ici pourquoi la construction de Voevodsky [17, Construction 5.3] donne la même opération cohomologique que celle de la définition 3.0.1.

Les données de la définitions 3.0.1 sont celles d'un groupe fini agissant sur un ensemble fini A de cardinal n et d'un schéma $S \in Sm/k$ muni d'un G-torseur étale U. Voevodsky se donne en outre un fibré vectoriel L et un isomorphisme de fibrés vectoriels sur S entre $\xi \oplus L$ et un fibré trivial de rang N où ξ est le fibré vectoriel de la définition 2.1.1. Pour tout $r \geq 0$, Voevodsky définit un morphisme

$$\tilde{P}\colon K_i \wedge \mathrm{Th}_{G\backslash U} L^i \to K_{iN} \ .$$

Par un jeu d'adjonctions qu'il serait peu intéressant de détailler, ce morphisme dans la catégorie des préfaisceaux d'ensembles pointés sur Sm/k correspond à un morphisme dans la catégorie des préfaisceaux d'ensembles pointés sur Sm/S :

$$\tilde{P}\colon K_i \to \mathbf{Hom}_{\bullet}(\mathrm{Th}_S L^i, K_{iN})$$

où K_i, K_{iN} et $\mathrm{Th}_S L^i$ sont considérés ici étant comme « au-dessus de S ». Il résulte aussitôt des définitions que ce morphisme est égal au composé :

$$K_i \xrightarrow{P_{\mathbf{A}^i}} K_{\xi^i} \xrightarrow{\cdot\tau_{L^i}} \mathbf{Hom}_{\bullet}(\mathrm{Th}_S L^i, K_{\xi^i \oplus L^i}) \simeq \mathbf{Hom}_{\bullet}(\mathrm{Th}_S L^i, K_{iN})$$

où $P_{\mathbf{A}^i}$ est le morphisme de la définition 2.1.3 appliqué au fibré trivial de rang i sur S et $\cdot\tau_{L^i}$ le morphisme de multiplication par la classe tautologique (cf. proposition 1.6.2).

Il est dès lors évident que la transformation

$$\tilde{P}\colon \widetilde{H}^{2i,i}(\mathcal{X}) \to \widetilde{H}^{in,2in}(\mathcal{X} \wedge S_+)$$

que Voevodsky en a déduit pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_{\bullet}(k)$ est la même que celle de la définition 3.0.1. Ceci montre *a posteriori* que bien que sa démonstration fût incorrecte, l'énoncé d'indépendance en le choix du supplémentaire L de ξ [17, Lemmas 5.2 & 5.3] était vrai.

4 Opérations de Steenrod

Soit ℓ un nombre premier. Soit k un corps parfait de caractéristique différente de ℓ. Nous allons enfin voir comment les constructions précédentes s'appliquent au cas de l'action évidente du groupe symétrique $\mathfrak{S}_\ell$ agissant sur $\{1, \ldots, \ell\}$ et donnent lieu aux opérations de Steenrod motiviques sur la cohomologie modulo ℓ. Il faut pour cela commencer par décomposer le motif à coefficients $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ du classifiant $\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell$. Dans cette section, s'il n'est pas précisé, l'anneau des coefficients des groupes de cohomologie sera toujours $\mathbf{F}_\ell$.

4.1 Le motif de $\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell$

Proposition 4.1.1 *Le motif $M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell; \mathbf{F}_\ell) \in DM^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(k, \mathbf{F}_\ell)$ se décompose de la façon suivante :*

$$M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell; \mathbf{F}_\ell) \simeq \oplus_{i\geq 0}\mathbf{F}_\ell(i)[2i] \oplus \oplus_{i\geq 0}\mathbf{F}_\ell(i+1)[2i+1] \ .$$

Les projections sur les différents facteurs correspondent aux classes de cohomologie v^i et uv^i dans $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell)$ où $v \in H^{2,1}(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell)$ est l'image inverse par le morphisme évident $\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell \to \mathbf{B}_{\acute{e}t}\mathbf{G}_m \simeq \mathbf{P}^\infty$ de $c_1(\mathscr{O}(1)) \in H^{2,1}(\mathbf{P}^\infty) \simeq \lim_n H^{2,1}(\mathbf{P}^n)$ et où $u \in H^{1,1}(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell)$ est l'unique élément tel que $\beta u = v$ et dont la restriction au point-base de $\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell$ soit nulle dans $H^{1,1}(k)$.

On définit $\mathbf{B}_{\mathrm{gm}}\mu_\ell$ en utilisant le caractère évident $\mu_\ell \subset \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ et les ouverts $U_d = \mathbf{A}^d - \{0\}$ les plus grands possibles (cf. proposition A.1) pour obtenir l'identification $\mathbf{B}_{\mathrm{gm}}\mu_\ell \simeq \mathbf{B}_{\text{ét}}\mu_\ell$. La proposition résulte alors la décomposition, pour tout $d \geq 1$, du motif du schéma quotient $\mu_\ell\backslash(\mathbf{A}^d - \{0\})$ faisant intervenir ceux des termes apparaissant ci-dessus qui ont un indice i vérifiant $0 \leq i \leq d - 1$.

Cette décomposition provient d'une formule plus générale dans la situation d'un $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur T au-dessus de $X \in Sm/k$ (comme ici $\mathbf{A}^d - \{0\}$ est un $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur au-dessus de $\mathbf{P}^{d-1}$). Il existe alors à isomorphisme près un unique fibré en droites L sur X muni d'un isomorphisme de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseurs entre T et le complémentaire de la section nulle de L. À partir de la suite de Kummer $0 \to \mu_\ell \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \xrightarrow{x \mapsto x^\ell} \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to 0$ (exacte pour la topologie étale), il vient immédiatement que le quotient $\mu_\ell \backslash T$ s'identifie au complémentaire de la section nulle dans le fibré en droites $L^{\otimes \ell}$. Le $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur $\mathbf{A}^d - \{0\}$ étant le complémentaire de la section nulle dans $\mathscr{O}(-1)$, il vient ainsi que $\mu_\ell \backslash (\mathbf{A}^d - \{0\})$ s'identifie au complémentaire de la section nulle dans le fibré en droites $\mathscr{O}(-\ell)$ sur $\mathbf{P}^{d-1}$.

Dans la situation générale d'un $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur T sur $X \in Sm/k$ qui soit le complémentaire de la section nulle d'un fibré en droites L sur X, en utilisant l'isomorphisme $M(\mathrm{Th}_X\, L) \simeq M(X)(1)[2]$ donné par l'isomorphisme de Thom (cf. définition 1.5.1), on voit que le motif de T s'insère dans un triangle distingué dans $DM_-^{\mathrm{eff}}(k, \mathbf{F}_\ell)$:

$$M(X)(1)[1] \xrightarrow{\delta} M(T) \to M(X) \to M(X)(1)[2]$$

où le morphisme $M(X) \to M(X)(1)[2]$ est induit par la classe $c_1(L) \in H^{2,1}(X)$ [5]. Si cette classe est nulle, il existe une rétraction $M(T) \to M(X)(1)[1]$ de δ et on obtient une décomposition $M(T) \xrightarrow{\sim} M(X) \oplus M(X)(1)[1]$. Plus précisément, si $w \in H^{1,1}(T)$ vérifie $\delta^\star w = 1 \in H^{0,0}(X)$, la classe w et la projection $T \to X$ induisent un morphisme $M(T) \to M(X)(1)[1]$. C'est une rétraction de δ. En effet, il s'agit de montrer que le morphisme composé

$$M(X)(1)[1] \xrightarrow{\delta} M(T) \xrightarrow{w} M(X)(1)[1]$$

est l'identité. Par construction, cette composition fixe la classe $1 \in H^{0,0}(X)$ et on peut conclure en utilisant le fait évident que $\delta \colon M(X)(1)[1] \to M(T)$ (et donc cette composition) est un morphisme de $M(X)$-comodules où $M(X)(1)[1]$ et $M(T)$ sont munis des structures évidentes de $M(X)$-comodules. Ainsi, les classes 1 et w induisent une décomposition $M(T) \xrightarrow{\sim} M(X) \oplus M(X)(1)[1]$ et on peut observer que la classe $w \in H^{1,1}(T)$ est bien définie modulo l'image de $H^{1,1}(X)$.

Comme $c_1(\mathscr{O}(-\ell)) = \ell c_1(\mathscr{O}(-1)) = 0 \in H^{2,1}(\mathbf{P}^{d-1})$, on obtient l'existence d'une classe $w \in H^{1,1}(\mu_\ell \backslash (\mathbf{A}^d - \{0\}))$ telle que 1 et w induisent un isomorphisme $M(\mu_\ell \backslash (\mathbf{A}^d - \{0\})) \xrightarrow{\sim} M(\mathbf{P}^{d-1}) \oplus M(\mathbf{P}^{d-1})(1)[1]$. On peut assurer l'unicité de w (vérifiant $\delta^\star w = 1$ comme plus haut) en demandant en outre que la restriction de w au point-base de $\mu_\ell \backslash (\mathbf{A}^d - \{0\})$ provenant d'un élément quelconque de $k^d - \{0\}$ soit nulle (on laisse en exercice au lecteur de montrer que les morphismes de restriction $H^{1,1}(\mathbf{A}^d - \{0\}) \to H^{1,1}(k)$ associés aux différents éléments de $k^d - \{0\}$ sont tous égaux).

Si on avait $\beta w = 0$, la classe w se relèverait en une classe de cohomologie $\tilde{w} \in H^{1,1}(\mu_\ell \backslash (\mathbf{A}^d - \{0\}))$ qui vérifierait $\delta^\star \tilde{w} \equiv 1 \mod \ell$. L'exactitude de la suite

$$H^{1,1}(\mu_\ell \backslash (\mathbf{A}^d - \{0\}), \mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta^\star} H^{0,0}(\mathbf{P}^{d-1}, \mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\cdot c_1(\mathscr{O}(-\ell))} H^{2,1}(\mathbf{P}^{d-1}, \mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z})$$

impliquerait alors que $c_1(\mathscr{O}(-\ell)) = 0 \in H^{2,1}(\mathbf{P}^{d-1}, \mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z})$ ce qui est faux pour $d \geq 2$.

Pour $d \geq 2$, on a donc $\beta w \neq 0$, ce qui implique l'existence de $\lambda \in \mathbf{F}_\ell^\times$ tel que $\lambda \cdot \beta w = v \in H^{2,1}(\mu_\ell \backslash (\mathbf{A}^d - \{0\}))$. En notant $u = \lambda w \in H^{1,1}(\mu_\ell \backslash (\mathbf{A}^d - \{0\}))$ qui vérifie $\beta u = v$, on obtient la décomposition sous la forme énoncée dans la proposition.

Proposition 4.1.2 *Pour tout $\lambda \in \mathbf{F}_\ell^\times$, notons $m_\lambda \colon \mu_\ell \to \mu_\ell$ l'élévation à la puissance λ et le morphisme $\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell \to \mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell$ qu'elle induit. Alors, dans $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell)$, on a : $m_\lambda^\star u = \lambda u$ et $m_\lambda^\star v = \lambda v$. Ainsi,* via *la décomposition de la proposition 4.1.1, $m^\star$ agit par la multiplication par λ^i sur le terme $\mathbf{F}_\ell(i)[2i]$ et par la multiplication par λ^{i+1} sur le terme $\mathbf{F}_\ell(i+1)[2i+1]$.*

[5] Si on dispose implicitement d'un morphisme $p \colon Y \to X$ dans Sm/k, une classe $x \in H^{p,q}(Y)$ (correspondant à un morphisme $M(Y) \to \mathbf{F}_\ell(q)[p]$) induit un morphisme $M(Y) \to M(X)(q)[p]$ qui est la composition $M(Y) \xrightarrow{(\mathrm{Id},p)} M(Y \times X) \simeq M(Y) \otimes M(X) \xrightarrow{x \otimes \mathrm{Id}_{M(X)}} M(X)(q)[p]$.

Enfin, la projection $M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell) \to M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell)_{\mathbf{F}_\ell^\times}$ sur le facteur direct des co-invariants sous l'action de $\mathbf{F}_\ell^\times$ est la projection sur la sous-somme suivante :

$$M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell)_{\mathbf{F}_\ell^\times} \simeq \oplus_{j\geq 0}\mathbf{F}_\ell((\ell-1)j)[2(\ell-1)j] \oplus \oplus_{j\geq 0}\mathbf{F}_\ell((\ell-1)(j+1))[2(\ell-1)(j+1)-1]\ .$$

Les classes $d = -v^{\ell-1} \in H^{2\ell-2,\ell-1}(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell)$ et $c = -uv^{\ell-2} \in H^{2\ell-3,\ell-1}(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell)$ sont invariantes sous l'action de $\mathbf{F}_\ell^\times$. Les projections de $M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell)_{\mathbf{F}_\ell^\times}$ sur les différents termes de la décomposition ci-dessus correspondent aux classes $(-1)^j d^j$ et $(-1)^{j+1}cd^j$.

La formule concernant $m_\lambda^\star v = \lambda v$ est évidente. Compte tenu des propriétés de u, l'identité $m_\lambda^\star u = \lambda u$ en résulte. Les autres énoncés en découlent immédiatement.

Proposition 4.1.3 *Il existe un isomorphisme canonique dans $DM^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(k, \mathbf{F}_\ell)$ compatible à l'extension du corps parfait k :*

$$M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})_{\mathbf{F}_\ell^\times} \simeq M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell)_{\mathbf{F}_\ell^\times}\ .$$

S'il existe $\zeta \in k^\times$ une racine primitive ℓ-ième de l'unité, l'isomorphisme est induit par l'isomorphisme $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_\ell$ envoyant 1 sur ζ. L'isomorphisme induit au niveau des co-invariants est évidemment indépendant du choix de ζ. En général, il existe une extension finie galoisienne k'/k de degré divisant $\ell - 1$ et donc premier à ℓ tel que k' contienne une racine primitive ℓ-ième de l'unité. Par un argument de transfert, on obtient l'existence et l'unicité d'un isomorphisme de la forme cherchée qui après extension des scalaires à k' soit celui construit précédemment dans le cas d'un corps possédant une racine primitive ℓ-ième de l'unité.

On peut ainsi procéder à une identification $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^{\mathbf{F}_\ell^\times} \simeq H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mu_\ell)^{\mathbf{F}_\ell^\times}$ des sous-algèbres fixées par l'action de $\mathbf{F}_\ell^\times$, ce qui fournit des classes c et d dans la cohomologie de $\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$.

Proposition 4.1.4 *Le morphisme canonique*

$$M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})_{\mathbf{F}_\ell^\times} \to M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mathfrak{S}_\ell)$$

est un isomorphisme dans $DM^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(k, \mathbf{F}_\ell)$.

On identifie ici implicitement $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ au sous-groupe de $\mathfrak{S}_\ell$ engendré par le ℓ-cycle de $\mathfrak{S}_\ell$ correspondant à la permutation $x \longmapsto x+1$ de $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ que l'on identifie ensemblistement à $\{1,\dots,\ell\}$ (par l'inverse de la réduction modulo ℓ). *Via* ces identifications, le normalisateur N de $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ dans $\mathfrak{S}_\ell$ est le groupe affine des bijections $x \longmapsto ax+b$ sur $\mathbf{Z}\ell\mathbf{Z}$ avec $a \in \mathbf{F}_\ell^\times$ et $b \in \mathbf{F}_\ell^\times$. L'action de N sur $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ par « conjugaison dans $\mathfrak{S}_\ell$ » se factorise par le quotient évident $N \to \mathbf{F}_\ell^\times$. Le morphisme considéré dans la proposition n'est donc autre que l'épimorphisme scindé donné par le corollaire A.5.

Pour obtenir le résultat, il reste à montrer que la composition

$$M(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})_{\mathbf{F}_\ell^\times} \to M(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} M(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell)_{\mathbf{F}_\ell^\times}$$

est un isomorphisme. Notons $\varphi \in \mathrm{End}(M(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell)_{\mathbf{F}_\ell^\times})$ cette composition divisée par $(\ell-2)!$. C'est un projecteur dont l'image s'identifie à $M(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)$. Pour conclure, il faut montrer que φ est l'identité de $M(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell)_{\mathbf{F}_\ell^\times}$. Par ailleurs, on peut identifier $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)$ à une sous-algèbre de $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell)^{\mathbf{F}_\ell^\times}$. Cette sous-algèbre est précisément l'image du projecteur que φ induit. Avant de montrer que φ est l'identité, on va montrer que φ induit l'identité de $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell)^{\mathbf{F}_\ell^\times}$, ce qui revient à montrer le lemme suivant :

Lemme 4.1.5 *L'inclusion $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mathfrak{S}_\ell) \subset H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mathbf{Z}/\ell)^{\mathbf{F}_\ell^\times}$ est une égalité.*

Il s'agit de montrer que les classes c et d appartiennent à la sous-algèbre $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)$.

Le classifiant $\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell$ s'identifie à la colimite $\mathbf{B}_{\text{gm}}\mathfrak{S}_\ell = \text{colim}_i\, \mu_\ell\backslash U_i$ d'un système de faisceaux représentables (cf. proposition A.1). Sur chacun de ces quotients $\mu_\ell\backslash U_i$, on dispose d'après la définition 2.1.1 d'un fibré vectoriel ξ de rang ℓ associé à l'action tautologique de $\mathfrak{S}_\ell$ sur $\{1,\dots,\ell\}$. Ces fibrés étant compatibles pour les différentes valeurs de i, on peut donner un sens à $c_{\ell-1}(\xi) \in H^{2\ell-2,\ell-1}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)$ (ceci sera rendu plus précis dans l'isomorphisme du corollaire 4.1.7). On peut vérifier que $d = c_{\ell-1}(\xi)$. En effet, on peut supposer qu'il existe une racine primitive ℓ-ième de l'unité $\zeta \in k$, ce qui permet de définir une inclusion $\mu_\ell \to \mathfrak{S}_\ell$. On vérifie alors facilement que l'image inverse de ξ sur $\mu_\ell\backslash(\mathbf{A}^d - \{0\})$ est $\oplus_{i=0}^{\ell-1} L^{\otimes}i$ où L est l'image inverse de $\mathscr{O}(1)$ sur $\mathbf{P}^{d-1}$, ce qui permet d'obtenir la formule :

$$c_{\ell-1}(\xi)_{|\mu_\ell\backslash\mathbf{A}^{d-0}} = \prod_{i=1}^{\ell-1}(iv) = -v^{\ell-1} = d\,.$$

Il reste à montrer que c appartient aussi à $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)$. Pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(k)$, l'image du Bockstein β sur $H^{\star,\star}(\mathcal{X};\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est le noyau de la « multiplication par ℓ » $H^{\star,\star}(\mathcal{X};\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to H^{\star,\star}(\mathcal{X};\mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z})$. Comme le morphisme évident $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell,\Lambda) \to H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell,\Lambda)$ est injectif non seulement pour $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ mais aussi pour $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}$ (cf. corollaire A.5), le fait que d soit dans l'image du Bockstein sur $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ implique que d peut aussi s'écrire $d = \beta(c')$ avec $c' \in H^{2\ell-3,\ell-1}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)$. La décomposition du motif $M(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})_{\mathbf{F}_\ell^\times}$ montre qu'il existe $a \in H^{2\ell-3,\ell-1}(k)$ et $b \in \mathbf{F}_\ell$ tels que dans $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^{\mathbf{F}_\ell^\times}$, on ait $c' = a + bc$. L'identité $\beta(c') = d$ impose que $b = 1$, d'où $c' = a + c$. Ceci montre que $c = c' - a$ appartient bien à la sous-algèbre $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)$ de $H^{\star,\star}(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^{\mathbf{F}_\ell^\times}$.

En utilisant que les classes d^j et cd^j dans $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell)^{\mathbf{F}_\ell^\times}$ pour tous $j \geq 0$ appartiennent à la sous-algèbre $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)$, on obtient que si p est le morphisme de projection de $M(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell)_{\mathbf{F}_\ell^\times}$ vers un des termes $\mathbf{F}_\ell(i)[2i]$ ou $\mathbf{F}_\ell(i)[2i-1]$ apparaissant dans sa décomposition (cf. propositions 4.1.2 et 4.1.3), alors $p \circ \varphi = \varphi$. Le lemme suivant appliqué à $\psi = \varphi - \text{Id}$ permet de conclure que φ est l'identité de $M(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell)_{\mathbf{F}_\ell^\times}$ et donc de terminer la démonstration de la proposition 4.1.4 :

Lemme 4.1.6 *Soit $M = \oplus_{i\in I} M_i$ une décomposition en somme directe dans $DM^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(k)$ telle que les objets M_i appartiennent à $DM^{\mathit{eff}}_{gm}(k)$. Pour tout $i \in I$, on note $p_i\colon M \to M_i$ le morphisme de projection. Soit ψ un endomorphisme de M telle que pour tout $i \in I$, $p_i \circ \psi = 0$. Alors, $\psi = 0$.*

Pour tout $i \in I$, on note $j_i\colon M_i \to M$ le morphisme d'inclusion. Par définition de la somme directe, pour conclure, il s'agit de montrer que pour tout $i \in I$, $\psi \circ j_i = 0$. Le morphisme $\psi \circ j_i$ étant de la forme $M_i \to \oplus_{j\in I} M_j$, comme M_i est compact, ce morphisme $\psi \circ j_i$ se factorise par un facteur direct évident $\oplus_{j\in J_i} M_j$ avec J_i une partie finie de I. On est alors ramené à montrer que pour tous $i \in I$ et $j \in J_i$, on a $p_j \circ \psi \circ j_i = 0$, ce qui résulte bien de l'hypothèse $p_j \circ \psi = 0$.

Corollaire 4.1.7 *Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie et $\rho\colon \mathfrak{S}_\ell \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire fidèle de $\mathfrak{S}_\ell$. Soit $(U_i)_{i\geq 1}$ une suite d'ouverts des espaces affines $V^{\oplus i}$ satisfaisant les hypothèses de la proposition A.1. Alors, pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$, l'application canonique est un isomorphisme*

$$\widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge (\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mathfrak{S}_\ell)_+) \xrightarrow{\sim} \lim_{i\geq 1} \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge (\mathfrak{S}_\ell\backslash U_i)_+)\,.$$

Comme la suite exacte de Milnor contient la surjectivité de cette application, il suffit de montrer l'injectivité. Soit $x \in \widetilde{H}^{p,q}(\mathcal{X} \wedge (\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)_+)$ une classe dont les images dans les groupes $\widetilde{H}^{p,q}(\mathcal{X} \wedge (\mathfrak{S}_\ell\backslash U_i)+)$ soient toutes nulles. Il s'agit de montrer que x est nulle. Pour cela, on peut supposer que k contient ζ, une racine primitive ℓ-ième de l'unité. D'après la proposition 4.1.4, il suffit de montrer l'annulation de l'image inverse de x par $\mathcal{X} \wedge f_+$ où f est le morphisme canoniquement associé à ζ : $\mathbf{B}_{\text{ét}}\mu_\ell \simeq \mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \to \mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell$. La proposition 4.1.1 fournit un isomorphisme

$$\widetilde{H}^{p,q}(\mathcal{X} \wedge (\mathbf{B}_{\text{ét}}\mu_\ell)_+) \xrightarrow{\sim} \lim_{d\geq 1} \widetilde{H}^{p,q}(\mathcal{X} \wedge (\mu_\ell\backslash(\mathbf{A}^d - \{0\}))_+)\,.$$

Ainsi, pour montrer que $x = 0$, il suffit de montrer l'annulation de l'image inverse de x par $\mathcal{X} \wedge g_{d+}$ pour tout $d \geq 1$ où g_d est la composition $\mu_\ell \backslash (\mathbf{A}^d - \{0\}) \to \mathbf{B}_{\text{ét}}\mu_\ell \simeq \mathbf{B}_{\text{ét}}\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \to \mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell$. Pour obtenir cela pour un certain d, vu l'hypothèse sur x, il suffit de montrer que pour i assez grand, g_d se factorise dans $\mathcal{H}(k)$ par le morphisme canonique $\mathfrak{S}_\ell \backslash U_i \to \mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell$, ce qui est évident.

4.2 Construction des opérations P^i et B^i sur $\widetilde{H}^{2\star,\star}$

Pour tout $r \geq 0$, on note

$$P_\ell \colon \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \to \widetilde{H}^{2r\ell,r\ell}(\mathcal{X} \wedge (\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)_+)$$

la transformation naturelle, pour $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$, correspondant à la construction $P^{\text{univ}}_{\mathfrak{S}_\ell}$ (cf. définition 3.4.2) pour l'action de $\mathfrak{S}_\ell$ sur $\{1, \dots, \ell\}$ (et ce bien sûr dans le cas de l'anneau de coefficients $\mathbf{F}_\ell$). *A priori*, cette opération $P^{\text{univ}}_{\mathfrak{S}_\ell}$ n'est définie qu'à « presqu'égalité près ». Le corollaire 4.1.7 montre que dans ce cas particulier, elle est définie sans ambiguité aucune.

D'après les proposition 4.1.2, 4.1.3 et 4.1.4, on peut définir de manique unique des transformations naturelles

$$P^i \colon \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \to \widetilde{H}^{2r+2i(\ell-1),r+i(\ell-1)}(\mathcal{X})$$

et

$$B^i \colon \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \to \widetilde{H}^{2r+2i(\ell-1)+1,r+i(\ell-1)}(\mathcal{X})$$

pour tout $i \in \mathbf{Z}$ telles que pour tout $x \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X})$, on ait :

$$P_\ell(x) = \sum_{j \geq 0} P^{r-j}(x)d^j + \sum_{j \geq 0} B^{r-1-j}(x)cd^j$$

et que $P^i = 0$ pour $i \geq r+1$ et $B^i = 0$ pour $i \geq r$.

Il résulte de [17, Proposition 3.6] que $P^i = 0$ et $B^i = 0$ si $i < 0$. On a ainsi :

$$P_\ell(x) = \sum_{j=0}^{r} P^{r-j}(x)d^j + \sum_{j=0}^{r-1} B^{r-1-j}(x)cd^j\ .$$

Que $\beta P_\ell(x) = 0$ (cf. théorème 3.6.1) revient à dire que $B^i(x) = \beta P^i(x)$ et $\beta B^i(x) = 0$.

4.3 Les opérations stables P^i et B^i

Définition 4.3.1 *Un nombre premier ℓ et un corps parfait k ayant été fixés, une opération cohomologique stable F de bidegré $(i, j) \in \mathbf{Z}^2$ est la donnée, pour tous $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ de transformations naturelles (pour $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$)*

$$F \colon \widetilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}) \to \widetilde{H}^{p+i,q+j}(\mathcal{X})$$

commutant aux isomorphismes de suspension $\widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^{\star+2,\star+1}(\mathcal{X} \wedge (\mathbf{A}^1/\mathbf{A}^1 - \{0\}))$ et $\widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^{\star+1,\star}(\mathcal{X} \wedge S^1)$ donnés par la multiplication à droite par les classes tautologiques dans $\widetilde{H}^{2,1}(\mathbf{A}^1/(\mathbf{A}^1 - \{0\}))$ et $\widetilde{H}^{1,0}(S^1)$. On dira que F est de degré i et de poids j.

On considère ici chaque foncteur $\widetilde{H}^{p,q}$ comme un préfaisceau d'*ensembles* sur $\mathcal{H}_\bullet(k)$. Cependant, les transformations naturelles qui composent une opération cohomologique stable sont automatiquement additives.

Une opération cohomologique stable importante est le Bockstein β. Elle est de bidegré $(1, 0)$.

Une opération cohomologique stable est déterminée par son action sur les classes dans $\widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X})$ pour pour $r \geq 0$ et $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$ et une famille de transformations naturelles $\widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X}) \to \widetilde{H}^{2r+i,r+j}(\mathcal{X})$ pour $r \geq 0$ s'étend en une opération cohomologique stable si et seulement si elle commute aux isomorphismes $\widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^{\star+2,\star+1}(\mathcal{X} \wedge (\mathbf{A}^1/\mathbf{A}^1 - \{0\}))$ donnés par la multiplication par $t \in \widetilde{H}^{2,1}(\mathbf{A}^1/(\mathbf{A}^1 - \{0\}))$ (t est la classe de Thom du fibré trivial de rang 1 sur $\operatorname{Spec} k$).

On définit de façon évidente une composition des opérations cohomologiques stables. Pour tout $\lambda \in H^{i,j}(k)$, la multiplication *à gauche* par λ définit une opération cohomologique stable de bidegré (i,j). On dispose ainsi d'un plongement de l'algèbre $H^{\star,\star}(k)$ dans l'algèbre des opérations cohomologiques stables. On considèrera principalement la structure de $H^{\star,\star}(k)$-module (à gauche) sur l'algèbre des opérations cohomologiques stables provenant de cette inclusion. Ainsi, pour F une opération cohomologique stable, λF est définie par $(\lambda F)(x) = \lambda \cdot F(x)$. On dispose également d'une structure de module-$H^{\star,\star}(k)$ [6] définie par $(F\lambda)(x) = F(\lambda x)$.

Proposition 4.3.2 *Les opérations P^i et B^i définies précédemment s'étendent en des opérations cohomologiques stables de bidegrés respectifs $(2i(\ell-1), i(\ell-1))$ et $(2i(\ell-1)+1, i(\ell-1))$ qui vérifient $B^i = \beta P^i$.*

Si on note $-\cup t$ la multiplication à droite par $t : \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X}) \to \widetilde{H}^{\star+2,\star+1}(\mathcal{X} \wedge \mathbf{A}^1/(\mathbf{A}^1 - \{0\}))$, comme on sait déjà que $B^i = \beta P^i$, il suffit de vérifier que pour tout $x \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X})$, on a $P^i(x \cup t) = P^i(x) \cup t$. D'après la proposition 3.2.1, on a $P_\ell(x \cup t) = P_\ell(x) \cup P_\ell(t) \in \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge (\mathbf{A}^1/\mathbf{A}^1 - \{0\}) \wedge (\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)_+)$. D'après la proposition 3.3.1, on a $P_\ell(t) = td$, ce qui montre que $P_\ell(x \cup t) = (P_\ell(x) \cup t)d$. L'identification des coefficients montre que l'on a bien $P^i(x \cup t) = P^i(x) \cup t$.

4.4 Premières propriétés

Proposition 4.4.1 *P^0 est l'identité et $B^0 = \beta$.*

D'après [17, Proposition 3.7], pour tout $r \geq 0$, l'action de P^0 sur $\widetilde{H}^{2r,r}$ est la multiplication par un nombre $\lambda_r \in \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$. La condition de stabilité se traduit en disant que $\lambda_r = \lambda_{r+1}$ pour tout $r \geq 0$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbf{F}_\ell$ tel que $P^0 = \lambda\,\mathrm{Id}$. Pour montrer que $\lambda = 1$, on peut par exemple vérifier que pour la classe $1 \in H^{0,0}(\operatorname{Spec} k) \simeq \widetilde{H}^{0,0}(S^0)$, on a $P_\ell(1) = 1 \in H^{0,0}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)$ ce qui implique que $P^0(1) = 1$.

Proposition 4.4.2 *Soit $x \in \widetilde{H}^{p,q}(\mathcal{X})$. Soit $x' \in \widetilde{H}^{p',q'}(\mathcal{X}')$.*
Pour tout $n \geq 0$, on a une égalité dans $\widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge \mathcal{X}')$:

$$P^n(xy) = \begin{cases} \sum_{i+j=n} P^i(x)P^j(y) & \text{si } \ell \neq 2 \\ \sum_{i+j=n} P^i(x)P^j(y) + \tau \sum_{i+j=n-1} B^i(x)B^j(y) & \text{si } \ell = 2 \end{cases}$$

Par ailleurs, $\beta(xx') = \beta(x) \cdot x' + (-1)^p x \cdot \beta(x')$.

La formule pour β est indiquée pour mémoire. Pour établir la première série de formules, en prenant garde aux signes, on peut se ramener au cas où $(p,q) = (2r,r)$ et $(p',q') = (2r',r')$ et alors cela résulte de l'identité $P_\ell(xy) = P_\ell(x)P_\ell(y) \in \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge \mathcal{X}' \wedge (\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)_+)$ (cf. proposition 3.2.1).

Proposition 4.4.3 *Pour tout $x \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X})$, on a $P^r(x) = x^\ell \in \widetilde{H}^{2r\ell,r\ell}(\mathcal{X})$.*

Il s'agit de déterminer le « terme constant » du développement de $P_\ell(x)$. Comme les restrictions de c et d au point-base de $\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell$ sont nulles, il s'agit en fait de calculer l'image de $P_\ell(x)$ par la flèche de restriction

$$\widetilde{H}^{2r\ell,r\ell}(\mathcal{X} \wedge (\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)_+) \to \widetilde{H}^{2r\ell,r\ell}(\mathcal{X})$$

induite par le point-base $\operatorname{Spec} k \to \mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell$. Celui-ci est induit par la classe du $\mathfrak{S}_\ell$-torseur trivial U sur $S = \operatorname{Spec} k$. D'après la proposition 3.4.3, $P^r(x)$ est l'image de x par la construction P pour ce torseur trivial et l'action de $\mathfrak{S}_\ell$ sur $A = \{1, \ldots, \ell\}$. En revenant à la définition 2.1.3, il est alors évident que P n'est alors que l'élévation à la puissance $\#A = \ell$.

Corollaire 4.4.4 *Soit $x \in \widetilde{H}^{p,q}(\mathcal{X})$. Soit $n \geq 0$. Si on a $p - q < n$ et $q \leq n$, alors $P^n(x) = 0$.*

[6] C'est ainsi que l'on notera les structures de modules à droite.

En effet, quitte à remplacer $\mathcal{X}$ par $\mathcal{X} \wedge S^{n-p+q-1} \wedge \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n-q}$, on peut supposer que $p = 2n-1$ et $q = n$. Si on note $e \in H^{1,0}(S^1)$ la classe tautologique, il faut montrer l'annulation de $P^n(x)e = P^n(xe) = (xe)^\ell \in H^{2n\ell,n\ell}(\mathcal{X} \wedge S^1)$. On conclut en remarquant que $(xe)^\ell$ peut être identifié (au signe près) au produit de $x^\ell \in H^{2n\ell-\ell,n\ell}(\mathcal{X})$ et de $e^\ell = 0 \in H^{\ell,0}(S^1)$.

Proposition 4.4.5 *Soit $X \in Sm/k$. Soit L un fibré en droites sur X. On a alors :*

$$P(c_1(L)) = c_1(L)^\ell + c_1(L)d \in \widetilde{H}^{2\ell,\ell}(X \times \mathbf{B}_{\acute{e}t}\mathfrak{S}_\ell)\ .$$

Autrement dit, $P^0(c_1(L)) = c_1(L)$, $P^1(c_1(L)) = c_1(L)^\ell$ et les autres opérations P^i et B^i s'annulent sur $c_1(L)$.

On sait déjà *a priori* que $P(c_1(L)) = P^1(c_1(L)) + P^0(c_1(L))d + B^0(c_1(L))c$. La formule résulte simplement du fait que P^0 est l'identité, B^0 le Bockstein et que sur $H^{2,1}$, P^1 soit l'élévation à la puissance ℓ.

Il était également possible de partir de la proposition 3.3.1, puis de montrer l'annulation des classes de Chern $c_i(\xi)$ pour $1 \leq i \leq \ell-1$ afin d'obtenir une formule pour $P(t_L)$ de laquelle on peut déduire une formule pour $P(c_1(L))$ en observant que $c_1(L)$ est l'image inverse de t_L par le morphisme $X \to \mathrm{Th}_X\, L$ donné par la section nulle.

Proposition 4.4.6 *Dans $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mu_\ell)$, on a les relations suivantes pour $i \geq 0$ et $j \geq 0$:*

$$P^i(v^j) = \binom{j}{i} v^{j+(\ell-1)i}\ , \quad \beta P^i(v^j) = 0\ ,$$

$$P^i(uv^j) = \binom{j}{i} uv^{j+(\ell-1)i}\ , \quad \beta P^i(uv^j) = \binom{j}{i} v^{j+(\ell-1)i+1}\ .$$

Dans $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\acute{e}t}\mathfrak{S}_\ell)$, on a les relations suivantes pour $i \geq 0$ et $j \geq 0$:

$$P^i(d^j) = (-1)^i \binom{(\ell-1)j}{i} d^{i+j}\ , \quad \beta P^i(d^j) = 0\ ,$$

$$P^i(cd^j) = (-1)^i \binom{(\ell-1)(j+1)-1}{i} cd^{i+j}\ , \quad \beta P^i(cd^j) = (-1)^i \binom{(\ell-1)(j+1)-1}{i} d^{i+j+1}\ .$$

Dans $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mu_\ell \times \mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell) \simeq H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mu_\ell) \otimes_{H^{\star,\star}(k)} H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)$, on a $P(v) = v^\ell \otimes 1 + v \otimes d$ d'après la proposition 4.4.5. On en déduit le développement de $P(v^j) = P(v)^j$ en utilisant la formule du binôme. Ceci permet de calculer les images de v^j par P^i et B^i. Les formules pour uv^j s'en déduisent en utilisant que les seules opérations P^i et B^i ne s'annulant pas sur u sont $P^0 = \mathrm{Id}$ et $B^0 = \beta$. Le résultat pour d^j et cd^j se déduit des autres formules en utilisant le fait que le plongement canonique de $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)$ dans $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mu_\ell)$ soit compatible avec l'action des opérations P^i et B^i (se ramener au cas où k possède une racine ℓ-ième de l'unité).

4.5 Relations d'Adem

On énonce ci-dessous les relations d'Adem. Pour le cas $\ell = 2$, on a noté $\mathrm{Sq}^{2n} = P^n$ et $\mathrm{Sq}^{2n+1} = B^n$. En général, l'opération cohomologique stable Sq^i est de bidegré $(i, \lfloor \frac{i}{2} \rfloor)$.

Théorème 4.5.1 (Relations d'Adem pour $\ell = 2$) *On suppose que a et b sont des entiers naturels tels que $0 < a < 2b$.*

(1) Si a est pair et b impair :

$$\mathrm{Sq}^a \mathrm{Sq}^b = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \binom{b-1-j}{a-2j} \mathrm{Sq}^{a+b-j} \mathrm{Sq}^j + \sum_{\substack{j=1 \\ impair}}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \binom{b-1-j}{a-2j} \rho\, \mathrm{Sq}^{a+b-j-1} \mathrm{Sq}^j$$

(1') Si a et b sont impairs :

$$\mathrm{Sq}^a\,\mathrm{Sq}^b=\sum_{\substack{j=0\\ impair}}^{\lfloor\frac{a}{2}\rfloor}\binom{b-1-j}{a-2j}\mathrm{Sq}^{a+b-j}\,\mathrm{Sq}^j$$

(2) Si a et b sont pairs :

$$\mathrm{Sq}^a\,\mathrm{Sq}^b=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{a}{2}\rfloor}\tau^{j \bmod 2}\binom{b-1-j}{a-2j}\mathrm{Sq}^{a+b-j}\,\mathrm{Sq}^j$$

(2') Si a est impair et b pair :

$$\mathrm{Sq}^a\,\mathrm{Sq}^b=\sum_{\substack{j=0\\ pair}}^{\lfloor\frac{a}{2}\rfloor}\binom{b-1-j}{a-2j}\mathrm{Sq}^{a+b-j}\,\mathrm{Sq}^j+\sum_{\substack{j=1\\ impair}}^{\lfloor\frac{a}{2}\rfloor}\binom{b-1-j}{a-1-2j}\rho\,\mathrm{Sq}^{a+b-j-1}\,\mathrm{Sq}^j$$

Les identités (1') et (2') se déduisent respectivement des identités (1) et (2) par application du Bockstein. Les formules apparaissant dans [17, Theorem 2.3] souffraient de la présence de coquilles dans les termes faisant intervenir ρ. On a vérifié par ordinateur que les coefficients des formules ci-dessus étaient les bons dans le cas où $a+b\leq 100$. Le principe de la démonstration rédigée dans [17] est cependant correct. (La démonstration est légèrement plus compliquée que dans le cas $\ell\neq 2$ qui apparaît plus bas.)

Théorème 4.5.2 (Relations d'Adem pour $\ell\neq 2$) *Si des entiers a et b vérifient $0<a<\ell b$, on a :*

$$P^aP^b=\sum_{t=0}^{\lfloor\frac{a}{\ell}\rfloor}(-1)^{a+t}\binom{(\ell-1)(b-t)-1}{a-\ell t}P^{a+b-t}P^t$$

S'ils vérifient $0<a\leq \ell b$, on a :

$$P^a\beta P^b=\sum_{t=0}^{\lfloor\frac{a}{\ell}\rfloor}(-1)^{a+t}\binom{(\ell-1)(b-t)}{a-\ell t}\beta P^{a+b-t}P^t+\sum_{t=0}^{\lfloor\frac{a-1}{\ell}\rfloor}(-1)^{a+t+1}\binom{(\ell-1)(b-t)-1}{a-\ell t-1}P^{a+b-t}\beta P^t$$

Comme indiqué dans [17, Theorem 10.3], le principe de la démonstration est le même que dans [14, Chapter VIII]. Pour en faciliter la compréhension et la reconstitution des moindres détails pour le lecteur intéressé, nous allons préciser certains points. Traitons par exemple le cas de la deuxième identité. Il s'agit d'établir une égalité entre deux opérations cohomologiques stables. Pour vérifier une telle égalité, il suffit de la tester sur des classes $x\in\widetilde{H}^{2r,r}(\mathcal{X})$ pour $\mathcal{X}\in\mathcal{H}_\bullet(k)$ et $r\geq 0$. Nous ne le ferons que pour une infinité d'entiers r ayant une forme très particulière, mais ce sera suffisant puisque si l'identité est vraie pour un certain r, elle l'est automatiquement pour tous les entiers $r'\leq r$.

La démonstration repose sur le théorème de symétrie qui énonce que $P_\ell(P_\ell(x))\in\widetilde{H}^{2r\ell^2,r\ell^2}(\mathcal{X}\wedge(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell\times\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell)_+)$ est invariant par l'échange des deux facteurs $\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell$. En utilisant les formules du §4.4, il est possible de développer $P_\ell(P_\ell(x))$ pour l'écrire sous la forme d'une somme de termes $\lambda\otimes c^id^j\otimes c^{i'}d^{j'}$ avec $\lambda\in\widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X})$ et i,i',j,j' des entiers naturels, i et i' devant valoir 0 ou 1. L'échange des deux facteurs envoie $\lambda\otimes c^id^j\otimes c^{i'}d^{j'}$ sur $(-1)^{ii'}\lambda\otimes c^{i'}d^{j'}\otimes c^id^j$. Le théorème de symétrie implique ainsi un certain nombre de relations entre les coefficients.

Précisément, pour $r>a+b$, on pose $p=r-b$ et $q=r\ell-a$ et on s'intéresse au coefficient devant $cd^{p-1}\otimes d^q$ dans $P_\ell(P_\ell(x))$. Le calcul montre que ce coefficient vaut :

$$\sum_{\delta=0}^{a}(-1)^\delta\binom{(\ell-1)(p-\delta)-1}{\delta}P^{a-\delta}\beta P^{b+\delta}(x)\,.$$

Le terme correspondant à $\delta = 0$ est précisément $P^a\beta P^b(x)$ que l'on cherche à réexprimer autrement. Il convient ainsi de s'arranger pour que ce soit le seul terme non nul. J'affirme que si N est assez grand, c'est le cas pour $r = \ell^N + b$[7]. Il s'agit de montrer que le coefficient binomial $\binom{(\ell-1)(p-\delta)-1}{\delta}$ est divisible par ℓ pour $1 \leq \delta \leq a$ et N assez grand. On a :

$$\binom{(\ell-1)(p-\delta)-1}{\delta} = \binom{(\ell-1)\ell^N - 1 - (\ell-1)\delta}{\delta}.$$

Pour x et y des entiers naturels, par un raisonnement sur les valuations ℓ-adiques des factorielles et des coefficients binomiaux, on obtient que $\binom{x}{y} \not\equiv 0 \mod \ell$ si et seulement s'il n'y a pas de retenue lors du calcul de la soustraction $x - y$ en termes des développements ℓ-adiques.

Il est évident que le développement de $(\ell-1)l^N - 1$ se termine par N chiffres égaux à $\ell - 1$. Si N est assez grand, aucune retenue n'apparaît donc quand on soustrait $(\ell-1)\delta$ à $(\ell-1)\ell^N - 1$. S'il n'y a pas de retenue dans la soustraction de δ à $(\ell-1)\ell^N - 1 - (\ell-1)\delta$, il vient donc qu'il n'y a pas de retenue dans l'addition de $(\ell-1)\delta$ et de δ, ce qui est manifestement faux si $\delta \neq 0$. Par conséquent, pour $1 \leq \delta \leq a$, on a bien $\binom{(\ell-1)(p-\delta)-1}{\delta} \equiv 0 \mod \ell$ pour N assez grand.

Sous l'hypothèse que $r = \ell^N + b$ soit assez grand, on a ainsi obtenu que le coefficient de $cd^{p-1} \otimes d^q$ (pour $p = r - b = \ell^N$ et $q = r\ell - a$) dans $P_\ell(P_\ell(x))$ est précisément $P^a\beta P^b(x)$. Par le théorème de symétrie, il est égal au coefficient de $d^q \otimes cd^{p-1}$, qui vaut :

$$\sum_{t=0}^{a+b}(-1)^{a+t}\binom{(\ell-1)(r-t)}{(\ell-1)r-a+t}\beta P^{a+b-t}P^t(x) + \sum_{t=0}^{a+b}(-1)^{a+t+1}\binom{(\ell-1)(r-t)-1}{(\ell-1)r-a+t}P^{a+b-t}\beta P^t(x).$$

En utilisant l'identité $\binom{x}{y} = \binom{x}{x-y}$, on peut le récrire :

$$\sum_{t=0}^{\lfloor \frac{a}{\ell} \rfloor}(-1)^{a+t}\binom{(\ell-1)(r-t)}{a-\ell t}\beta P^{a+b-t}P^t(x) + \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{a-1}{\ell} \rfloor}(-1)^{a+t+1}\binom{(\ell-1)(r-t)-1}{a-\ell t-1}P^{a+b-t}\beta P^t(x).$$

On a $\binom{(\ell-1)(r-t)}{a-\ell t} = \binom{(\ell-1)(b-t)+(\ell-1)\ell^N}{a-\ell t}$. Pour N assez grand, ce coefficient binomial est congru modulo ℓ à $\binom{(\ell-1)(b-t)}{a-\ell t}$. En effet, si y est un entier naturel donné, la réduction modulo ℓ de $\binom{x}{y}$ pour $x \geq 0$ ne dépend que de la classe de congruence de x modulo ℓ^N pour N assez grand. C'est à cet endroit que l'on utilise $a \leq \ell b$ puisque cela permet de s'assurer que $(\ell-1)(b-t) \geq 0$ sous l'hypothèse que $0 \leq t \leq \frac{a}{\ell}$. De même, pour chacun des termes de la deuxième somme, on a une congruence modulo ℓ entre $\binom{(\ell-1)(r-t)-1}{a-\ell t-1}$ et $\binom{(\ell-1)(b-t)-1}{a-\ell t-1}$, ce qui achève la démonstration de la deuxième série des relations d'Adem énoncées pour $\ell \neq 2$. (La première série d'identités donnant une formule pour P^aP^b pour $0 < a < \ell b$ s'obtient de façon similaire en considérant les coefficients devant $d^p \otimes d^q$ et $d^q \otimes d^p$ avec $p = r - b$, $q = r\ell - a$ comme ci-dessus, mais avec $r = \frac{\ell^N-1}{\ell-1} + b$ pour N assez grand.)

5 L'algèbre de Steenrod et sa duale

On fixe un corps parfait k et un nombre premier ℓ inversible dans k. On notera simplement $H^{\star,\star}$ l'algèbre de cohomologie motivique $H^{\star,\star}(k)$ de k à coefficients dans $\mathbf{F}_\ell$.

5.1 L'algèbre $A^{\star,\star}$ et la comultiplication $\Psi^\star$

Définition 5.1.1 *Un monôme en β et les P^i est une expression de la forme*

$$\beta^{\varepsilon_0}P^{s_1}\beta^{s_1}\dots P^{s_k}\beta^{\varepsilon_k}$$

[7] Ainsi, $p = r - b = \ell^N$. C'est le même choix qui est fait dans [14, p. 121], mais des coquilles peuvent faire croire à un choix différent ($p = \frac{\ell^N-1}{\ell-1} - b$), ce qui entraînerait, qu'outre le terme voulu $P^a\beta P^b$ apparaîtrait le terme $P^{a-1}\beta P^{b+1}$.

avec $k \geq 0$, $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ et $s_i > 0$. On note k la longueur du monôme. Le monôme est dit admissible si pour $1 \leq i \leq k-1$, on a $s_i \geq \ell s_{i+1} + \varepsilon_i$.

Par composition des opérations P^i et β définies dans la section 4, à chaque monôme est associé une opération cohomologique stable dont le bidegré est (n,w) avec $w = (\ell - 1)\sum_{i=1}^{k} s_i$ et $n = 2w + \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i$. L'entier w sera appelé le poids du monôme.

Définition 5.1.2 *On note $A^{\star,\star}$ le $H^{\star,\star}$-module libre formellement défini comme ayant pour base l'ensemble des monômes admissibles.*

Proposition 5.1.3 *Le morphisme évident de $H^{\star,\star}$-modules de $A^{\star,\star}$ vers l'algèbre des opérations cohomologiques stables est injectif et identifie $A^{\star,\star}$ à une sous-algèbre de l'algèbre des opérations cohomologiques stables.*

Nous allons commencer par montrer que l'image de $A^{\star,\star}$ par ce morphisme est une sous-algèbre de l'algèbre des opérations cohomologiques stables. Compte tenu des formules de la proposition 4.4.2, il suffit pour cela d'établir le lemme suivant :

Lemme 5.1.4 *Pour tout monôme M en β et les P^i, l'opération cohomologique stable associée à M est une $H^{\star,\star}$-combinaison linéaire d'opérations cohomologiques stables associées à des monômes admissibles.*

Nous allons démontrer ce lemme par récurrence sur le poids w du monôme (le résultat est évident si $w = 0$). Supposons donc le résultat obtenu pour les monômes de poids $< w$. Au cours de cette démonstration, nous dirons qu'une opération cohomologique stable est admissible si elle est $H^{\star,\star}$-combinaison linéaire d'opérations associée à des monômes admissibles.

Fixons donc $w > 0$. On voudrait montrer que l'opération cohomologique associée à un monôme $M = \beta^\varepsilon P^a M'$ de poids w est admissible. Commençons pour cela par montrer que l'on peut supposer que le monôme M' est admissible. Par hypothèse de récurrence sur le poids, l'opération cohomologique associée à M' est une somme d'opérations de la forme $\lambda M''$ où M'' est un monôme admissible et $\lambda \in H^{\star,\star}$. Il s'agit donc de montrer que les opérations de la forme $\beta^\varepsilon P^a \lambda M''$ avec M'' monôme admissible sont admissibles. Si $\lambda \notin H^{0,0}$, en utilisant les formules de la proposition 4.4.2, il est possible de réexprimer l'opération $\beta^\varepsilon P^a \lambda M''$ sous la forme d'une combinaison linéaire d'opérations associées à des monômes de poids $< w$. Grâce à l'hypothèse de récurrence sur w, on peut donc supposer que $\lambda \in H^{0,0}$, bref on se ramène au cas où $\lambda = 1$.

Ainsi, il s'agit de montrer que si $M = \beta^\varepsilon P^a M'$ est un monôme de poids w avec M' un monôme admissible, alors l'opération cohomologique associée à M est admissible. Nous allons le montrer par récurrence descendante sur $\ell a + \varepsilon$ (cette grandeur qui est majorée en raison de l'hypothèse sur le poids). Si M n'est pas déjà admissible, on peut écrire $M' = \beta^{\varepsilon'} P^b M''$ et $M = \beta^\varepsilon P^a \beta^{\varepsilon'} P^b M''$. En appliquant les relations d'Adem (cf. §4.5) au monôme non admissible $P^a \beta^{\varepsilon'} P^b$, on obtient une expression de l'opération associée à M comme une somme d'opérations de la forme $\mu \beta^{\eta'} P^{a'} \beta^{\eta''} M'''$ (avec $\mu \in H^{p,q}$ et M'' un monôme) et il s'agit de montrer que chacun de ces termes induit une opération admissible. Si le coefficient μ est de poids $q > 0$, c'est le cas puisque le monôme $\beta^{\eta'} P^{a'} \beta^{\eta''} M'''$ étant de poids $< w$, l'hypothèse de récurrence s'applique. Ceci permet de ne se soucier que des termes apparaissant dans les relations d'Adem dont les coefficients appartiennent à $\mathbf{F}_\ell$. On remarque qu'on a alors $\ell a' + \eta' > \ell a + \varepsilon$, ce qui permet de conclure.

Pour finir la démonstration de la proposition 5.1.3, il reste à démontrer le fait intéressant, à savoir que les opérations cohomologiques stables associées aux monômes admissibles sont linéairement indépendantes sur $H^{\star,\star}$. Pour $w \geq 0$, notons $A^{\star,\star \leq w}$ le sous-$H^{\star,\star}$-module libre de $A^{\star,\star}$ de base les monômes admissibles de poids $\leq w$. Il suffit d'établir le lemme suivant :

Lemme 5.1.5 *Soit $w \geq 0$. Alors, pour N et n assez grands (par exemple $N > w + 1$ et $n > w$), le morphisme $H^{\star,\star}$-linéaire d'évaluation sur la classe $(u \otimes v)^{\otimes n}$*

$$A^{\star,\star \leq w} \to H^{\star,\star}((\mu_\ell \backslash (\mathbf{A}^N - \{0\}))^{2n})$$

est l'inclusion d'un facteur direct.

Le $H^{\star,\star}$-module d'arrivée est muni de la base évidente obtenue par produit tensoriel des éléments $1, v, v^2, \dots, v^{N-1}, u, uv, uv^2, \dots, uv^{N-1}$ (voir la démonstration de la proposition 4.1.1). On peut considérer la matrice B de l'évaluation en $u \otimes v \otimes \dots \otimes u \otimes v$. Essentiellement pour des raisons de poids, les matrices obtenues pour différents entiers $N > w+1$ ne diffèrent que par l'ajout ou la suppression de lignes de zéros.

Il est en principe possible de calculer cette matrice B en utilisant les formules du §4.4. Pour $\ell \neq 2$, on peut remarquer que la matrice B, *a priori* à coefficients dans $H^{\star,\star}$ (ou plus précisément de son anneau opposé) est en fait à coefficients dans $\mathbf{F}_\ell = H^{0,0} \subset H^{\star,\star}$. Il est évident aussi que cette matrice est la même que celle correspondant à une étude homologue pour les opérations de Steenrod dans le cadre topologique classique. Une variante des arguments conduisant à [14, Corollary 2.6, Chapter VI] montre que cette matrice est la matrice d'une application $\mathbf{F}_\ell$-linéaire injective. Par extension des scalaires à $H^{\star,\star}$, on obtient que le morphisme considéré dans le lemme est l'inclusion d'un facteur direct.

Si $\ell = 2$, on note I l'idéal bilatère de $H^{\star,\star}$ défini par $I = \oplus_{p\in\mathbf{Z},q>0} H^{p,q}$. Le quotient $H^{\star,\star}/I$ s'identifie à $\mathbf{F}_\ell$. L'idéal I étant stable par les opérations P^i et β, il vient que les opérations cohomologiques stables associées aux monômes induisent des transformations naturelles

$$H^{\star,\star}(\mathcal{X})/IH^{\star,\star}(\mathcal{X}) \to H^{\star,\star}(\mathcal{X})/IH^{\star,\star}(\mathcal{X})$$

pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$. Comme $\tau \in I$, on peut remarquer que la formule pour $P^n(xy)$ de la proposition 4.4.2 prend modulo I exactement la forme qu'elle a dans le cas $\ell \neq 2$. Pourvu que l'on raisonne modulo I, il n'y a donc plus lieu de distinguer les cas $\ell \neq 2$ et $\ell = 2$. Ainsi, les calculs faits dans la démonstration de [14, Corollary 2.6, Chapter VI] peuvent être appliqués au cas $\ell = 2$ afin de montrer que si on note $\overline{B}$ la matrice à coefficients dans $\mathbf{F}_\ell$ obtenue en réduisant modulo I les coefficients de B, alors $\overline{B}$ est la matrice d'une application $\mathbf{F}_\ell$-linéaire injective. Que le morphisme considéré dans le lemme soit l'inclusion d'un facteur direct résulte alors du lemme suivant :

Lemme 5.1.6 *Soit $H^{\star,\star}$ un anneau bigradué « commutatif » (au sens où $x \cdot y = (-1)^{pq} y \cdot x$ si $x \in H^{p,\star}$ et $y \in H^{q,\star}$). On suppose que $H^{\star,w} = 0$ si $w < 0$, que $H^{\star,0} = H^{0,0}$ et que $H^{0,0}$ est un corps k. On dispose ainsi d'un morphisme d'anneaux canonique $H^{\star,\star} \to k$.*

Soit $\varphi \colon M^{\star,\star} \to N^{\star,\star}$ un morphisme (de bidegré $(0,0)$) entre $H^{\star,\star}$-modules bigradués libres de rang fini. On suppose que le morphisme $\overline{\varphi} \colon k \otimes_{H^{\star,\star}} M^{\star,\star} \to k \otimes_{H^{\star,\star}} N^{\star,\star}$ est injectif. Alors, φ est l'inclusion d'un facteur direct.

Choisissons des bases $(e_j)_{j\in J}$ et $(f_i)_{i\in I}$ formées d'éléments homogènes de $M^{\star,\star}$ et $N^{\star,\star}$ respectivement. Notons $B = (b_{i,j})_{i,j}$ la matrice de φ dans ces bases. Autrement dit, on a $\varphi(e_j) = \sum_i b_{ij} f_i$. Notons $\overline{B} = (\overline{b_{i,j}})_{i,j}$ la matrice à coefficients dans k obtenue par réduction. Par hypothèse, c'est une matrice de rang égal au cardinal de J. Quitte à enlever des lignes à cette matrice, pour obtenir la conclusion voulue, on peut supposer que I et J ont le même cardinal. Sous cette hypothèse supplémentaire, le but est de montrer que φ est un isomorphisme.

Comme le déterminant de $\overline{B}$ (pour des choix d'ordres totaux sur I et J) est non nul, il existe une bijection $\sigma \colon J \to I$ telle que $\overline{b}_{\sigma(j),j} \neq 0$. On peut évidemment supposer que $I = J$ et que σ est l'identité. Alors, comme pour tout $i \in I$, $\overline{b}_{i,i} \neq 0$, le bidegré de cet élément ne peut être que $(0,0)$, ce qui montre que e_i et f_i sont de même bidegré. Ceci permet de supposer que $M^{\star,\star} = N^{\star,\star}$, autrement dit que φ est un endomorphisme de $M^{\star,\star}$. Pour tout $w \in \mathbf{Z}$, notons $W_{\leq w} M^{\star,\star}$ le sous-$H^{\star,\star}$-module de $M^{\star,\star}$ engendré par ceux des éléments $(e_i)_{i\in I}$ dont le bidegré (p,q) vérifie $q \leq w$.

Les hypothèses sur $H^{\star,\star}$ font que $\varphi(W_{\leq w} M^{\star,\star}) \subset W_{\leq w} M^{\star,\star}$. Les éléments e_i induisent une base évidente du gradué $\mathrm{Gr}_W M^{\star,\star}$. La matrice de $\mathrm{Gr}_W(\varphi)$ dans cette base est à coefficients dans $H^{0,0} = k$ et n'est autre que $\overline{B}$ qui est inversible. Ainsi, φ induit un isomorphisme sur $\mathrm{Gr}_W M^{\star,\star}$. Il résulte d'une utilisation itérée du lemme des cinq que φ est un isomorphisme.

Avant de procéder aux définitions suivantes, précisons que sauf mention du contraire, on considérera toujours la structure de $H^{\star,\star}$-module évidente sur $A^{\star,\star}$. Si M et N sont deux $H^{\star,\star}$-modules bigradués, on peut former le produit tensoriel $M \otimes_{H^{\star,\star}} N$ en munissant M de la structure de

$H^{\star,\star}$-bimodule-$H^{\star,\star}$ obtenue en combinant la structure de module à gauche donnée et la structure de module à droite définie par $m\lambda = (-1)^{|\lambda||m|}\lambda m$ où $\lambda \in H^{\star,\star}$ et $m \in M^{\star,\star}$ où $|\lambda|$ (resp. $|m|$) désignent le premier entier constituant le bidegré de λ (resp. m).

Si $x \in \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X})$ et $y \in \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{Y})$ sont deux classes de cohomologie d'espaces arbitraires, on définit une application $H^{\star,\star}$-linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A^{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} A^{\star,\star} & \longrightarrow & \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}) \\ F & \longmapsto & F(x,y) \end{array} \right.$$

définie par $(C \otimes D)(x,y) = (-1)^{|D||x|} Cx \cdot Dy$ pour C et D des éléments de $A^{\star,\star}$.

Proposition 5.1.7 *On définit une application $H^{\star,\star}$-linéaire $\Psi^\star \colon A^{\star,\star} \to A^{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} A^{\star,\star}$ telle que pour tout $F \in A^{\star,\star}$, $\Psi^\star(F)$ soit l'unique élément tel que*

$$(\Psi^\star(F))(x,y) = F(xy) \in \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y})$$

pour tous $x \in H^{\star,\star}(\mathcal{X})$ et $y \in H^{\star,\star}(\mathcal{Y})$, $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$, $\mathcal{Y} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$ [8].

- $\Psi^\star(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id}$;
- *si $\Psi^\star(F) = \sum_i C_i \otimes D_i$ et $\Psi^\star(G) = \sum_j C'_j \otimes D'_j$, on a $\Psi^\star(GF) = \sum_{i,j} (-1)^{|C_i||D'_j|} C'_j C_i \otimes D'_j D_i$.*
- *cette comultiplication $\Psi^\star$ est cocommutative et coässociative (au sens bigradué) et la coünité est le morphisme $\xi_0 \colon A^{\star,\star} \to H^{\star,\star}$ d'évaluation sur la classe $1 \in H^{\star,\star}$.*

L'unicité de $\Psi^\star(F)$ pour tout $F \in A^{\star,\star}$ résulte du lemme suivant qui est une conséquence immédiate du lemme 5.1.5 :

Lemme 5.1.8 *Soit $w \geq 0$. Alors, pour N et n assez grands, le morphisme $H^{\star,\star}$-linéaire d'évaluation sur $((u \otimes v)^{\otimes n}, (u \otimes v)^{\otimes n})$*

$$A^{\star,\star \leq w} \otimes_{H^{\star,\star}} A^{\star,\star \leq w} \to H^{\star,\star}((\mu_\ell \backslash (\mathbf{A}^N - \{0\}))^{4n})$$

est l'inclusion d'un facteur direct.

Si $\Psi^\star(F)$ et $\Psi^\star(G)$ existent, alors on vérifie immédiatement que $\Psi^\star(GF)$ existe et est donné par la formule donnée ci-dessus. Pour obtenir l'existence de $\Psi^\star(F)$, on se ramène donc au cas où $F = P^i$ ou $F = \beta$, ce pour quoi la proposition proposition-p-d-un-produit donne des formules explicites. Par exemple, $\Psi^\star(\beta) = \beta \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \beta$ et si $\ell \neq 2$, $\Psi^\star(P^n) = \sum_{i+j=n} P^i \otimes P^j$.

Enfin, à propos des propriétés de la comultiplication $\Psi^\star$, l'énoncé concernant la coünité vient de ce que $1 \in H^{\star,\star}$ soit l'unité, la cocommutativité vient de la commutativité au sens gradué de la multiplication sur la cohomologie motivique et la coässociavitié résulte formellement de l'associativité de cette multiplication. Plus précisément, grâce à une version en trois variables du lemme 5.1.8 qui en utilise deux, on peut montrer que pour tout $F \in A^{\star,\star}$, $(\mathrm{Id} \otimes \Psi^\star)(\Psi^\star(F))$ et $(\Psi^\star \otimes \mathrm{Id})(\Psi^\star(F))$ sont deux éléments du produit tensoriel triple $A^{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} A^{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} A^{\star,\star}$ qui ont la même vertu caractéristique que si on les écrit comme une somme $\sum_i A_i \otimes B_i \otimes C_i$, alors quelles que soient les classes de cohomologie motivique x, y et z (que l'on suppose de degrés pairs pour ne pas avoir à introduire de signe), on ait :

$$F(xyz) = \sum_i A_i(x) B_i(y) C_i(z) \ .$$

[8] Si on souhaite se dispenser d'écrire certains signes, on peut se contenter du cas où $|x|$ et $|y|$ sont pairs, et même que les bidegrés respectifs sont de la forme $(2r, r)$ et $(2s, 2s)$ pour $r, s \geq 0$.

5.2 L'algèbre duale $A_{\star,\star}$

Définition 5.2.1 *Pour tout $(i,j) \in \mathbf{Z}^2$, on note $A_{i,j}$ l'ensemble des familles d'homomorphismes de groupes $\varphi\colon A^{p,q} \to H^{p-i,q-j}$ pour tout $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$, telles que pour tout $\lambda \in H^{\star,\star}$ et $F \in A^{\star,\star}$, on ait $\varphi(\lambda F) = \lambda\varphi(F)$.*

L'accouplement canonique qui à $A^{p,q} \times A_{i,j} \to H^{p-i,q-j}$ qui à (F,φ) associe $\varphi(F)$ sera noté $\langle F, \varphi\rangle$. Il vérifie $\langle \lambda F, \varphi\rangle = \lambda \langle F, \varphi\rangle$ pour $\lambda \in H^{\star,\star}$, $F \in A^{\star,\star}$ et $\varphi \in A_{\star,\star}$. On munit $A_{\star,\star}$ d'une structure de module-$H^{\star,\star}$ de façon à ce que $\langle F, \varphi\mu\rangle = \langle F, \varphi\rangle \mu$ pour $F \in A^{\star,\star}$, $\varphi \in A_{\star,\star}$ et $\mu \in H^{\star,\star}$.

Définition 5.2.2 *On généralise l'accouplement $\langle\cdot,\cdot\rangle : A^{\star,\star} \times A_{\star,\star} \to H^{\star,\star}$ en un accouplement $\langle\cdot,\cdot\rangle : A^{\star,\star} \times (A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X})) \to \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X})$ pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$ en posant :*

$$\langle F, \alpha \otimes x\rangle = \langle F, \alpha\rangle\, x$$

pour $F \in A^{\star,\star}$, $\alpha \in A_{\star,\star}$ et $x \in \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X})$.

Lemme 5.2.3 *Soit $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$ un espace tel qu'il existe $d \geq 0$ tel que $\widetilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}) = 0$ pour $p > q+d$ (on dira que $\mathcal{X}$ est cohomologiquement de dimension finie $\leq d$[9]). Si $\varphi\colon A^{\star,\star} \to \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X})$ est une application $H^{\star,\star}$-linéaire d'un certain bidegré $(-i,-j)$, il existe un unique élément $\alpha \in A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} \widetilde{H}^{\star,\star}(X)$ tel que pour tout $F \in A^{\star,\star}$, on ait :*

$$\varphi(F) = \langle F, \alpha\rangle\ .$$

Plus précisément, $\alpha = \sum_I \theta(I)^\star \otimes \varphi(P^I)$ où les éléments $\theta(I)^\star \in A_{\star,\star}$ sont définis par $\left\langle P^J, \theta(I)^\star\right\rangle = \delta_{IJ}$ (pour tous les monômes admissibles P^I et P^J) et tous sauf un nombre fini des coefficients $\varphi(P^I)$ sont nuls.

La seule chose à justifier est qu'il n'y ait qu'un nombre fini de monômes admissibles P^I tels que $\varphi(P^I) \neq 0$. Si un monôme P^I est de poids w, il est de bidegré $(2w+e, w)$ avec $e \geq 0$ et donc $\varphi(P^I) \in \widetilde{H}^{2w+e-i,w-j}(\mathcal{X})$. Si $\varphi(P^I) \neq 0$, on a donc $2w+e-i \leq w-j+d$, d'où $w \leq w+e \leq d+i-j$, ce qui donne une borne sur le poids des monômes P^I tels que $\varphi(P^I) \neq 0$. Il n'y en a donc qu'un nombre fini.

Avec $\mathcal{X} = S^0$ et $d = 0$, ce lemme montre que $A_{\star,\star}$ est un module-$H^{\star,\star}$ libre ayant pour base les éléments $\theta(I)^\star$. Ce lemme permet également de procéder à la définition suivante :

Définition 5.2.4 *Soit $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$ un espace cohomologiquement de dimension finie. Soit $x \in \widetilde{H}^{p,q}(\mathcal{X})$. On note $\lambda^\star(x)$ l'unique élément de $A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} \widetilde{H}^{\star,\star}$ tel que pour tout $F \in H^{\star,\star}$, on ait :*

$$F(x) = \langle F, \lambda^\star(x)\rangle\ .$$

Définition 5.2.5 *Pour tout $k \geq 0$, on note $M_k = P^{\ell^{k-1}} \ldots P^\ell P^1 \in A^{2w,w}$ (avec $w = \ell^k - 1$). Ce sont des monômes admissibles. On note $\xi_k \in A_{2w,w}$ les éléments qui leurs correspondent dans la base duale formée des éléments $\theta(I)^\star$. Les monômes $M_k\beta \in A^{2w+1,2w}$ sont également admissibles, on note $\tau_k \in A_{2w+1,w}$ les éléments correspondants dans la base duale de celle des monômes admissibles.*

Proposition 5.2.6 *Soit $v = c_1(\mathscr{O}(1)) \in H^{2,1}(\mathbf{P}^\infty) \subset H^{2,1}(\mathbf{B}_{ét}\mu_\ell)$ (cf. proposition 4.1). Si M est un monôme (admissible ou non) tel que $M(v) \neq 0$, alors il existe $k \geq 0$ tel que $M = M_k$ et alors $M(v) = M_k(v) = v^{\ell^k}$.*

Si M est un monôme (admissible ou non) tel que $M(u) \neq 0$ dans $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{ét}\mu_\ell)$, alors soit $M = \mathrm{Id}$, soit M est de la forme $M = M_k\beta$ pour $k \geq 0$ et $M(u) = M_k(v) = v^{\ell^k}$.

Grâce aux formules du §4.4, ceci s'établit par récurrence sur la longueur d'un monôme M tel que $M(v) \neq 0$.

[9]Les espaces X_+ pour $X \in Sm/k$ en sont.

Corollaire 5.2.7 *Pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned}\lambda^\star(v) &= \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \otimes v^{\ell^k} \in A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} H^{\star,\star}(\mathbf{P}^{n-1}) \ , \\ \lambda^\star(u) &= \xi_0 \otimes u + \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k \otimes v^{\ell^k} \in A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} H^{\star,\star}(\mu_\ell \backslash (\mathbf{A}^n - \{0\})) \ .\end{aligned}$$

Que ceci ait un sens vient du fait que v soit nilpotent dans $H^{\star,\star}(\mathbf{P}^{n-1})$ pour tout $n \geq 1$.

Définition 5.2.8 *On définit un accouplement*

$$(A^{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} A^{\star,\star}) \times (A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} A_{\star,\star}) \to H^{\star,\star}$$

par la formule

$$\langle C \otimes D, \alpha \otimes \beta \rangle = (-1)^{|D||\alpha|} \langle C, \alpha \rangle \cdot \langle D, \beta \rangle \ .$$

Définition 5.2.9 *Si α et β sont deux éléments de $A_{\star,\star}$, on note $\alpha\beta \in A_{\star,\star}$ l'élément défini par l'identité*

$$\langle F, \alpha\beta \rangle = \langle \Psi^\star F, \alpha \otimes \beta \rangle$$

pour tout $F \in A^{\star,\star}$. (Ceci définit bien un élément de $A_{\star,\star}$ puisque $\langle \Psi^\star(\lambda F), \alpha \otimes \beta \rangle = \langle \lambda \Psi^\star(F), \alpha \otimes \beta \rangle = \lambda \langle \Psi^\star(F), \alpha \otimes \beta \rangle$ pour tous $F \in A^{\star,\star}$ et $\lambda \in H^{\star,\star}$.)

Ceci munit $A_{\star,\star}$ d'une structure d'anneau commutatif au sens bigradué. L'unité est l'élément ξ_0 (cf. définitions 5.1.7 et 5.2.5).

Ceci ne fait que refléter les propriétés de la comultiplication $\Psi^\star$ sur $A^{\star,\star}$. (Afin d'obtenir l'associativité, pour bien faire, il faudrait en toute rigueur introduire un accouplement entre les produits tensoriels triples de $A^{\star,\star}$ et $A_{\star,\star}$, ce pour quoi la seule difficulté réside dans les choix de signes.)

Cette multiplication sur $A_{\star,\star}$ vérifie une compatibilité avec la structure de module-$H^{\star,\star}$ sur $A_{\star,\star}$:

$$\alpha(\beta\lambda) = (\alpha\beta)\lambda$$

pour $\alpha, \beta \in A_{\star,\star}$ et $\lambda \in H^{\star,\star}$.

En particulier, en faisant $\beta = \xi_0$, on obtient que la multiplication à droite par $\lambda \in H^{\star,\star}$ pour la structure de module-$H^{\star,\star}$ sur $A_{\star,\star}$ est donnée par la multiplication à droite par $\xi_0\lambda$ pour la structure d'anneau sur $A_{\star,\star}$. Ceci permet aussi d'observer que l'application $H^{\star,\star} \to A^{\star,\star}$ qui à λ associe $\xi_0\lambda$ est un morphisme d'anneaux et on peut réinterpréter ce qui précède en disant que la structure de module-$H^{\star,\star}$ sur $A_{\star,\star}$ est induite par ce morphisme d'anneaux $H^{\star,\star} \to A_{\star,\star}$.

Ces considérations permettent de donner un sens à l'anneau (commutatif au sens bigradué) $A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} H^{\star,\star}(\mathcal{X})$ intervenant dans la proposition suivante :

Proposition 5.2.10 *Soit $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(S)$ un espace cohomologiquement de dimension finie. Alors, l'application $\lambda^\star \colon H^{\star,\star}(\mathcal{X}) \to A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} H^{\star,\star}(X)$ est un morphisme d'anneaux.*

Ceci ne présente aucune difficulté.

Dans le cas particulier $\mathcal{X} = \bullet$, on obtient :

Corollaire 5.2.11 *On dispose d'un morphisme d'anneaux $\lambda^\star \colon H^{\star,\star} \to A_{\star,\star}$ défini par le fait que pour tous $x \in H^{\star,\star}$ et $F \in A^{\star,\star}$, on ait l'identité suivante dans $H^{\star,\star}$:*

$$\langle F, \lambda^\star(x) \rangle = F(x) \ .$$

Remarque 5.2.12 *On n'a pour le moment considéré $A^{\star,\star}$ que comme un $H^{\star,\star}$-module pour la composition à gauche par la multiplication (à gauche) par des éléments de $H^{\star,\star}$. On peut aussi obtenir une structure de module-$H^{\star,\star}$ en utilisant la composition à droite : $F\lambda = F \circ \lambda$ pour tous $F \in A^{\star,\star}$ et $\lambda \in H^{\star,\star}$.*

Ceci fait de $A^{\star,\star}$ un $H^{\star,\star}$-bimodule-$H^{\star,\star}$. Comme $A_{\star,\star}$ est, au sens gradué, le groupe des morphismes $A^{\star,\star} \to H^{\star,\star}$ de $H^{\star,\star}$-modules, la structure de module-$H^{\star,\star}$ sur $A^{\star,\star}$ induit une structure de $H^{\star,\star}$-module sur $A_{\star,\star}$. (Précisément, si $\alpha \in A_{\star,\star}$, $\lambda \in H^{\star,\star}$ et $F \in A^{\star,\star}$, on a : $\langle F, \lambda\alpha\rangle = \langle F\lambda, \alpha\rangle$.) Cette structure de $H^{\star,\star}$-module sur $A_{\star,\star}$ est celle induite par le morphisme d'anneaux $\lambda^\star \colon H^{\star,\star} \to A^{\star,\star}$. Plus précisément, on a :

$$\langle F, x\alpha\rangle = \langle F \circ x, \alpha\rangle = \langle F, \lambda^\star(x)\alpha\rangle$$

pour $F \in A^{\star,\star}$, $x \in H^{\star,\star}$ et $\alpha \in A_{\star,\star}$.

La démonstration de cette compatiblité n'étant pas inintéressante, nous allons la détailler. Choisissons une décomposition $\Psi^\star F = \sum_i A_i \otimes B_i$ avec A_i et B_i des éléments homogènes de $A^{\star,\star}$. Observons que pour tous $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$ et $y \in \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X})$, on a :

$$(F \circ x)(y) = F(xy) = \sum_i (-1)^{|x||B_i|} A_i(x) B_i(y)\ .$$

Ainsi, $F \circ x = \sum_i (-1)^{|x||B_i|} A_i(x) B_i \in A^{\star,\star}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\langle F, x\alpha\rangle &= \langle F \circ x, \alpha\rangle \\
&= \sum_i (-1)^{|x||B_i|} \langle A_i(x) B_i, \alpha\rangle \\
&= \sum_i (-1)^{|x||B_i|} A_i(x) \langle B_i, \alpha\rangle \\
&= \sum_i (-1)^{|x||B_i|} \langle A_i, \lambda^\star(x)\rangle \langle B_i, \alpha\rangle \\
&= \sum_i \langle A_i \otimes B_i, \lambda^\star(x) \otimes \alpha\rangle \\
&= \langle \Psi^\star F, \lambda^\star(x) \otimes \alpha\rangle \\
&= \langle F, \lambda^\star(x)\alpha\rangle\ .
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $F \in A^{\star,\star}$, on a bien $x\alpha = \lambda^\star(x)\alpha$.

On a vu que les deux morphismes d'anneaux $H^{\star,\star} \to A^{\star,\star}$ définis par $x \longmapsto \lambda^\star(x)$ et $x \longmapsto \xi_0 x$ induisait respectivement les structures de modules à gauche et à droite sur $A_{\star,\star}$. Ils permettent de considérer dedeux manières différentes $A_{\star,\star}$ comme une algèbre (comutative au sens bigradué) sur $H^{\star,\star}$. La structure provenant de l'application $x \longmapsto \xi_0 x$ est étudiée dans le théorème qui suit et elle sera appellée « algèbre-$H^{\star,\star}$ » :

Théorème 5.2.13 *En tant qu'algèbre-$H^{\star,\star}$ commutative au sens bigradué, $A_{\star,\star}$ admet une présentation par générateurs et relations, les générateurs étant les éléments $\xi_k \in A_{2(\ell^k-1),\ell^k-1}$ pour $k \geq 0$ et $\tau_k \in A_{2(\ell^k-1)+1,\ell^k-1}$ pour $k \geq 0$, soumis à la relation $\xi_0 = 1$ et à la famille de relations suivantes, pour tous $k \geq 0$:*

$$\begin{cases} \tau_k^2 = 0 & si\ \ell \neq 2 \\ \tau_k^2 = \xi_{k+1}\tau + \tau_0\xi_{k+1}\rho + \tau_{k+1}\rho & si\ \ell = 2 \end{cases}$$

Il convient de commencer par vérifier que ces relations sont satisfaites dans $A_{\star,\star}$. Le calcul τ_k^2 provient de l'examen du coefficient de $v^{2\ell^k}$ dans le développement de $\lambda^\star(u)^2 = \lambda^\star(u^2)$. Si $\ell \neq 2$, on a $\lambda^\star(u^2) = 0$ car $u^2 = 0$. Sinon, pour $\ell = 2$, on utilise que $u^2 = \tau v + \rho u$ et donc que $\lambda^\star(u^2) = \lambda^\star(\tau)\lambda^\star(v) + \lambda^\star(\rho)\lambda^\star(u)$. On peut alors conclure en utilisant les formules évidentes $\lambda^\star(\tau) = \xi_0\tau + \tau_0\rho$ et $\lambda^\star(\rho) = \xi_0\rho$.

Définition 5.2.14 *Pour tout monôme admissible $\beta^{\varepsilon_0}P^{s_1}\beta^{\varepsilon_1}\dots P^{s_k}\beta^{\varepsilon_k}$, on peut prolonger la suite des entiers $(\varepsilon_i)_{i\geq 0}$ et $(s_i)_{i\geq 1}$ par $\varepsilon_i = s_i = 0$ pour $i > k$ et on note $r_i = s_i - (\ell s_{i+1} + \varepsilon_i) \geq 0$ pour tout $i \geq 1$. On obtient ainsi toutes les suites $I = (\varepsilon_0, r_1, \varepsilon_1, r_2, \varepsilon_2, \dots, r_k, \varepsilon_k, 0, \dots)$ d'entiers nuls à partir d'un certain rang et telles que la sous-suite $(\varepsilon_i)_{i\geq 0}$ soit faites de 0 et de 1. À une telle suite sont associés les éléments de même bidegré $\omega(I) = \tau_0^{\varepsilon_0}\dots\tau_k^{\varepsilon_k}\xi_1^{r_1}\dots\xi_k^{r_k} \in A_{\star,\star}$ et $\theta(I) = \beta^{\varepsilon_0}P^{s_1}\beta^{\varepsilon_1}\dots P^{s_k}\beta^{\varepsilon_k} \in A^{\star,\star}$ avec $s_i = \sum_{j\geq i}(r_j+\varepsilon_j)\ell^{j-i}$. On ordonne ces suites $I = (\varepsilon_0, r_1, \varepsilon_1, \dots)$ en utilisant l'ordre lexicographique correspondant à un ordre de lecture des lettres de la droite vers la gauche.*

Proposition 5.2.15
- *Si $I = J$, $\langle\theta(I), \omega(J)\rangle = \pm 1$.*
- *Si $I < J$, $\langle\theta(I), \omega(J)\rangle = 0$.*

Si $\ell \neq 2$, on peut observer que quels que soient I et J, le coefficient $\langle\theta(I), \omega(J)\rangle \in H^{\star,\star}$ appartient à $\mathbf{F}_\ell = H^{0,0}$ (en particulier, si les bidegrés de $\theta(I)$ et $\omega(J)$ ne sont pas les mêmes, ce coefficient est nul). En effet, il résulte des définitions, du corollaire 5.2.7 et de la proposition 5.2.10 que si on écrit $\omega(J) = \tau_{i_1}\dots\tau_{i_m}\xi_{j_1}\dots\xi_{j_n}$, alors $\langle\theta(I), \omega(J)\rangle$ est le coefficient devant $v^{\ell^{i_1}} \otimes \dots \otimes v^{\ell^{i_m}} \otimes v^{\ell^{j_1}} \otimes \dots \otimes v^{\ell^{j_m}}$ dans la décomposition de la classe $\theta(I)(u^{\otimes m} \otimes v^{\otimes n}) \in H^{\star,\star}((\mathbf{B}_{\text{ét}}\mu_\ell)^{m+n})$ sur la base déduite de la décomposition de la proposition 4.1.1.

Or, à partir des formules du §4.4, il est évident que la sous-$\mathbf{F}_\ell$-algèbre de $H^{\star,\star}((\mathbf{B}_{\text{ét}}\mu_\ell)^{m+n})$ engendrée par les éléments $1^{\otimes i-1} \otimes u \otimes 1^{\otimes m+n-i}$ et $1^{\otimes i-1} \otimes v \otimes 1^{\otimes m+n-i}$ pour $1 \leq i \leq m+n$ est stable par les opérations P^k et β et donc aussi par les opérations $\theta(I)$. Les coefficients $\langle\theta(I), \omega(J)\rangle$ appartiennent donc bien à $\mathbf{F}_\ell$.

Ce principe de calcul vaut aussi évidemment pour la version topologique usuelle de l'algèbre de Steenrod et de sa duale. Les coefficients $\langle\theta(I), \omega(J)\rangle$ sont donc les mêmes qu'en topologie. La propriété voulue pour $\ell \neq 2$ se déduit donc de l'énoncé topologique [9, Lemma 8].

Pour $\ell = 2$, on ne peut pas utiliser le même raisonnement, mais il est possible d'adapter les arguments de la démonstration de [9]. Notons $J = (\varepsilon_0, r_1, \varepsilon_1, \dots, r_k, \varepsilon_k, 0, \dots)$. On raisonne par récurrence sur $\sum_{i\geq 1} r_i + \sum_{i\geq 0}\varepsilon_i$. Si cette quantité est nulle, le résultat est évident. Sinon, on note k le plus grand entier tel que $r_k \neq 0$ ou $\varepsilon_k \neq 0$.

Dans le premier cas, on suppose que $\varepsilon_k = 0$ et donc $r_k \geq 1$. Notons $J' = (\varepsilon_0, r_1, \varepsilon_1, \dots, r_{k-1}, \varepsilon_{k-1}, r_k - 1, 0, \dots)$ de sorte que $\omega(J) = \omega(J')\xi_k$. Pour tout I, on a :

$$\langle\theta(I), \omega(J)\rangle = \langle\Psi^\star\theta(I), \omega(J') \otimes \xi_k\rangle \ .$$

Si $I \leq J$, I est de la forme $I = (\tilde{\varepsilon}_0, \tilde{r}_1, \tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{r}_{k-1}, \tilde{\varepsilon}_{k-1}, \tilde{r}_k, 0, \dots)$. À partir des formules $\Psi^\star\beta = \beta \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \beta$ et $\Psi^\star P^n = \sum_{a+b=n} P^a \otimes P^b + \sum_{a+b=n-1} \tau\beta P^a \otimes \beta P^b$ et de la formule de la proposition 5.1.7 énonçant une compatibilité de $\Psi^\star$ à la composition, on peut développer $\Psi^\star\theta(I)$ en une somme de termes de la forme $F \otimes M$ où $F \in A^{\star,\star}$ et où M est un monôme (ou 0 si deux β se suivent dans la composition). Ces termes ne peuvent contribuer à l'accouplement avec $\omega(J') \otimes \xi_k$ que si $\langle M, \xi_k\rangle \neq 0$, c'est-à-dire si le monôme est $M = M_k$ (cf. propostion 5.2.6 et corollaire 5.2.7). On observe que l'on ne peut obtenir un tel terme que si $\tilde{s}_k = \tilde{r}_k \geq 1$. Ainsi, si $\tilde{r}_k = 0$, on a $I < J$ et $\langle\theta(I), \omega(J)\rangle = 0$. Sinon, $\tilde{r}_k \geq 1$ et on peut introduire $I' = (\tilde{\varepsilon}_0, \tilde{r}_1, \tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{r}_{k-1}, \tilde{\varepsilon}_{k-1}, \tilde{r}_k - 1, 0, \dots)$ et alors, dans le développement de $\Psi^\star\theta(I)$, le terme de la forme $F \otimes M_k$ cherché est $\pm\theta(I') \otimes M_k$, de sorte que $\langle\theta(I), \omega(J)\rangle = \langle\theta(I'), \omega(J')\rangle$. Comme on a évidemment $I' \leq J'$ et $I' = J'$ si et seulement si $I = J$, on peut conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence à J'.

On procède de même si $J = (\varepsilon_0, r_1, \varepsilon_1, \dots, r_k, \varepsilon_k, 0, \dots)$ avec $\varepsilon_k = 1$. On note $J' = (\varepsilon_0, r_1, \varepsilon_1, \dots, r_k, 0, 0, \dots)$ de sorte que $\omega(J) = \omega(J')\tau_k$, d'où :

$$\langle\theta(I), \omega(J)\rangle = \langle\Psi^\star\theta(I), \omega(J') \otimes \tau_k\rangle \ .$$

Dans ce cas, on cherche quelque terme de la forme $F \otimes M_k\beta$ dans le développement de $\Psi^\star\theta(I)$. Si $I = (\tilde{\varepsilon}_0, \tilde{r}_1, \tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{r}_{k-1}, \tilde{\varepsilon}_{k-1}, \tilde{r}_k, \tilde{\varepsilon}_k, 0, \dots) \leq J$, pour qu'apparaisse un tel terme, il faut que $\tilde{\varepsilon}_k = 1$. On peut alors introduire $I' = (\tilde{\varepsilon}_0, \tilde{r}_1, \tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{r}_{k-1}, \tilde{\varepsilon}_{k-1}, \tilde{r}_k, 0, 0, \dots)$ et obtenir

$$\langle\omega(I), \omega(J)\rangle = \pm\langle\theta(I') \otimes M_k\beta, \omega(J') \otimes \tau_k\rangle = \pm\langle\omega(I'), \omega(J')\rangle \ ,$$

ce qui permet de conclure par récurrence.

Corollaire 5.2.16 *Les éléments $\omega(I)$ constituent une base de $A_{\star,\star}$ comme module-$H^{\star,\star}$.*

Le fait que la famille soit libre ne pose pas de difficulté : si $\sum_J \omega(J)\lambda_J = 0$ était une relation non triviale, en notant $I = \min\{J, \lambda_J \neq 0\}$ (le minimum étant pris pour l'ordre total défini plus haut), on aurait $0 \neq \lambda_I = \pm\left\langle P^I, \sum_J \omega(J)\lambda_J\right\rangle = 0$, d'où une contradiction. La démonstration du fait que les $\omega(J)$ engendrent $A_{\star,\star}$ est plus délicate que l'on pourrait l'imaginer *a priori*. Soit $(i,j) \in \mathbf{Z}^2$. Montrons que tout élément de $A_{i,j}$ est combinaison linéaire des $\omega(J)$. Notons $w = i - j$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble *fini* des I tels que $\theta(I)$ soit de poids $\leq w$. Il résulte de la démonstration du lemme 5.2.3 que tout élément $\alpha \in A_{i,j}$ s'écrit de manière unique $\alpha = \sum_{I\in\mathcal{B}} \theta(I)^\star\lambda_I$.

Comme $\mathcal{B}$ est fini, pour l'ordre induit, c'est un honnête ensemble fini totalement ordonné. Cela a donc un sens de montrer par récurrence descendante sur $I_0 = \min\{I, \lambda_I \neq 0\}$ que tout élément (non nul) $\alpha \in A_{i,j}$ comme ci-dessus est combinaison linéaire des $\omega(J)$ pour $J \in \mathcal{B}$. On peut ainsi supposer que $\alpha = \sum_{I\geq I_0, I\in\mathcal{B}} \theta(I)^\star\lambda_I \in A_{i,j}$ et que pour tout $I \in \mathcal{B}$ tel que $I > I_0$, si $\lambda \in H^{\star,\star}$ est un élément tel que $\theta(I)^\star\lambda \in A_{i,j}$, alors $\theta(I)^\star\lambda$ est combinaison linéaire des $\omega(J)$ pour $J \in \mathcal{B}$. Ceci permet bien sûr de supposer qu'en fait $\alpha = \theta(I_0)^\star\lambda_{I_0}$. La proposition 5.2.15 implique qu'il existe d'uniques coefficients $\mu_I \in H^{\star,\star}$ pour $I > I_0$ (mais *a priori* I n'est pas forcément dans $\mathcal{B}$!) tels que

$$\pm\omega(I_0) = \theta(I_0)^\star + \sum_{I>I_0} \theta(I)^\star\mu_I \ ,$$

d'où

$$\alpha = \theta(I_0)^\star\lambda_{I_0} = \pm\omega(I_0)\lambda_{I_0} - \sum_{I>I_0, I\in\mathcal{B}} \theta(I)^\star\mu_I\lambda_{I_0} \ .$$

En effet, le choix de l'ensemble $\mathcal{B}$ fait que les termes $\theta(I)^\star\mu_I\lambda_{I_0}$ sont nuls pour $I \notin \mathcal{B}$. De là, on peut conclure que α est combinaison linéaire des $\omega(J)$, $J \in \mathcal{B}$ en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 5.2.13. Notons $\tilde{A}_{\star,\star}$ l'algèbre définie par la présentation apparaissant dans l'énoncé. Les relations vérifiées plus haut montrent qu'on dispose d'un morphisme évident $\tilde{A}_{\star,\star} \to A_{\star,\star}$. Il s'agit de montrer que c'est un isomorphisme. Si $\ell \neq 2$, il est évident que $\tilde{A}_{\star,\star}$ est un module-$H^{\star,\star}$ libre ayant pour base les monômes $\omega(I)$ (définis plus haut dans $A_{\star,\star}$, mais ils ont bien entendu aussi un sens dans $\tilde{A}_{\star,\star}$). Cette base de $\tilde{A}_{\star,\star}$ s'envoie sur une base de $A_{\star,\star}$ d'après le corollaire 5.2.16, donc $\tilde{A}_{\star,\star} \to A_{\star,\star}$ est un isomorphisme.

Si $\ell = 2$, la présentation a une forme telle que le fait que les éléments $\omega(I) \in \tilde{A}_{\star,\star}$ constituent une famille libre ou génératrice de $\tilde{A}_{\star,\star}$ comme module-$H^{\star,\star}$ n'a rien de flagrant, algébriquement parlant. Notons $M \subset \tilde{A}_{\star,\star}$ le sous-module-$H^{\star,\star}$ engendré par les éléments $\omega(I)$. Le morphisme composé $M \to \tilde{A}_{\star,\star} \to A_{\star,\star}$ est un isomorphisme en vertu du corollaire 5.2.16. Pour conclure, il suffit de montrer que $M = \tilde{A}_{\star,\star}$, autrement dit que M est stable par produits. Comme M est évidemment stable par multiplication par les éléments de $H^{\star,\star}$ et les ξ_k, on se ramène à montrer que tout produit $\tau_{i_1}\tau_{i_2}\dots\tau_{i_n}$ appartient à M. C'est le cas par définition si les indices i_k sont distincts. Dans le cas général, le résultat s'obtient par récurrence sur n en utilisant les relations $\tau_k^2 = \xi_{k+1}\tau + \tau_0\xi_{k+1}\rho + \tau_{k+1}\rho$ pour $k \geq 0$.

5.3 La comultiplication $\Psi_\star$ sur $A_{\star,\star}$

Définition 5.3.1 *On note $A^{\star,\star} \otimes_{\rho,H^{\star,\star}} A^{\star,\star}$ le produit tensoriel de $A^{\star,\star}$ vu comme module-$H^{\star,\star}$ par la multiplication à droite par $H^{\star,\star} \subset A^{\star,\star}$ (d'où la notation ρ en indice) et de $A^{\star,\star}$ et de $A^{\star,\star}$ considéré comme $H^{\star,\star}$-module comme on l'a fait jusqu'à présent.*

En vérité, les deux copies de $A^{\star,\star}$ apparaissant dans ce produit tensoriel sont toutes les deux munies de la structure de $H^{\star,\star}$-bimodule-$H^{\star,\star}$ provenant de la multiplication à gauche et à droite par $H^{\star,\star} \subset A^{\star,\star}$. Le produit tensoriel $A^{\star,\star} \otimes_{\rho,H^{\star,\star}} A^{\star,\star}$ hérite donc ainsi d'une structure de $H^{\star,\star}$-bimodule-$H^{\star,\star}$.

Définition 5.3.2 *On note $A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star},\lambda} A_{\star,\star}$ le produit tensoriel de deux copies de $A^{\star,\star}$ vu comme $H^{\star,\star}$-bimodule-$H^{\star,\star}$* via *la multiplication à gauche par $\lambda^\star(x)$ et à droite par $x\xi_0$ pour tout $x \in H^{\star,\star}$ (cf. remarque 5.2.12).*

Ainsi, $A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star},\lambda} A_{\star,\star}$ est également un $H^{\star,\star}$-bimodule-$H^{\star,\star}$. (En tant que groupe abélien, il ne dépend que de la structure de module-$H^{\star,\star}$ sur le facteur de gauche et de la structure de $H^{\star,\star}$-module sur le facteur de droite induite par $\lambda^\star \colon H^{\star,\star} \to A^{\star,\star}$, ce qui est la raison pour laquelle on a mis λ en indice.

Définition 5.3.3 *On définit un accouplement* $(A^{\star,\star} \otimes_{\rho,H^{\star,\star}} A^{\star,\star}) \times (A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star},\lambda} A_{\star,\star}) \to H^{\star,\star}$ *par les formules équivalentes suivantes :*

$$[C \otimes D, \alpha \otimes \beta] = \langle C \langle D, \alpha \rangle, \beta \rangle = \langle C, \langle D, \alpha \rangle \beta \rangle = \langle C, \lambda^\star(\langle D, \alpha \rangle)\beta \rangle$$

pour $C, D \in A^{\star,\star}$ *et* $\alpha, \beta \in A_{\star,\star}$.

Lemme 5.3.4 *Soit* $\varphi \colon A^{\star,\star} \otimes_{\rho,H^{\star,\star}} A^{\star,\star} \to H^{\star,\star}$ *une application* $H^{\star,\star}$*-linéaire faisant décroître le bidegré de* $(i,j) \in \mathbf{Z}^2$*. Alors, il existe un unique élément* $\psi \in A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star},\lambda} A_{\star,\star}$ *tel que* $\varphi = [\cdot, \psi]$.

Il est évident que les éléments $P^I \otimes P^J$ où P^I et P^J parcourent les monômes admissibles forment une base de $A^{\star,\star} \otimes_{\rho,H^{\star,\star}} A^{\star,\star}$ comme $H^{\star,\star}$-module et que $\left[P^I \otimes P^J, \theta(J')^\star \otimes \theta(I')^\star\right] = \delta_{II'}\delta_{JJ'}$. Un raisonnement semblable à celui du lemme 5.2.3 montre que φ s'annule sur tous les $P^I \otimes P^J$ sauf un nombre fini, ce qui permet de donner une formule pour ψ comme combinaison linéaire d'un nombre fini des $\theta(J')^\star \otimes \theta(I')^\star$ (qui forment une base de $A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star},\lambda} A_{\star,\star}$) comme module-$H^{\star,\star}$.

Définition 5.3.5 *On définit une application* $A_{\star,\star} \xrightarrow{\Psi_\star} A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star},\lambda} A_{\star,\star}$ *de façon à ce que la formule suivante soit satisfaite pour* $C, D \in A^{\star,\star}$ *et* $\alpha \in A_{\star,\star}$ *:*

$$[C \otimes D, \Psi_\star \alpha] = \langle CD, \alpha \rangle \ .$$

La composition dans $A^{\star,\star}$ induit une application $H^{\star,\star}$-linéaire $A^{\star,\star} \otimes_{\rho,H^{\star,\star}} A^{\star,\star} \to A^{\star,\star}$ qui à $C \otimes D$ associe CD. L'existence et l'unicité de $\Psi_\star \alpha$ pour tout $\alpha \in A_{\star,\star}$ résulte de cette observation et du lemme 5.3.4. La construction $\Psi_\star$ reflète ainsi en quelque sorte la composition dans $A^{\star,\star}$. Pour réduire le nombre de signes dans la définition, nous avons utilisé une convention différente de celle de [17]. On ne s'étonnera donc par que les tenseurs apparaissant dans la proposition 5.3.8 soient inversés par rapport à [17, Lemma 12.11].

Proposition 5.3.6 *L'application* $\Psi_\star \colon A_{\star,\star} \to A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star},\lambda} A_{\star,\star}$ *est un morphisme d'anneaux, où* $A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star},\lambda} A_{\star,\star}$ *est muni de la structure évidente d'anneau commutatif au sens bigradué.*

Outre l'identité évidente $\Psi_\star(\xi_0) = \xi_0 \otimes \xi_0$, il s'agit de montrer que pour tous $C, D \in A^{\star,\star}$ et $\alpha, \beta \in A_{\star,\star}$, on a $[C \otimes D, \Psi_\star \alpha \cdot \Psi_\star \beta] = \langle CD, \alpha\beta \rangle$. Ceci s'obtient sans difficulté autre que celle de vérifier les signes en partant d'expressions de $\Psi_\star \alpha$, $\Psi_\star \beta$, $\Psi^\star C$, $\Psi^\star D$ comme sommes de tenseurs et en déroulant les définitions des deux membres jusqu'à obtenir une égalité.

Remarque 5.3.7 *On montre facilement que* $\Psi_\star \colon A_{\star,\star} \to A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star},\lambda} A_{\star,\star}$ *est un morphisme de* $H^{\star,\star}$*-bimodule-*$H^{\star,\star}$*. Compte tenu du fait que* $\Psi_\star$ *soit un morphisme d'anneaux, cela revient à énoncer que pour tout* $\mu \in H^{\star,\star}$*, on a d'une part* $\Psi_\star(\mu\xi_0) = \Psi^\star(\lambda^\star(\mu)) = \lambda^\star(\mu) \otimes \xi_0$ *et d'autre part* $\Psi_\star(\xi_0\mu) = \xi_0 \otimes \xi_0\mu$.

Proposition 5.3.8 *Pour tout* $k \geq 0$*, on a les égalités suivantes dans* $A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star},\lambda} A_{\star,\star}$ *:*

$$\Psi_\star \xi_k = \sum_{i=0}^{k} \xi_i \otimes \xi_{k-i}^{\ell^i} \qquad \Psi_\star \tau_k = \xi_0 \otimes \tau_k + \sum_{i=0}^{k} \tau_i \otimes \xi_{k-i}^{\ell^i}$$

On se donne C et D des éléments de $A^{\star,\star}$. Calculons $CD(v) \in H^{\star,\star}(\mathbf{P}^{d-1})$ pour tout $d \geq 1$. La formule $\lambda^\star(v) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \otimes v^{\ell^i}$ du corollaire 5.2.7 implique que $D(v) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle D, \xi_i \rangle v^{\ell^i}$. On a aussi :

$$\lambda^\star(v^{\ell^i}) = (\lambda^\star(v))^{\ell^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_j^{\ell^i} \otimes v^{\ell^{i+j}} \ ,$$

ce qui signifie que pour tout $F \in A^{\star,\star}$, on a : $F(v^{\ell^i}) = \sum_{j=0}^{\infty} \left\langle F, \xi_j^{\ell^i} \right\rangle v^{\ell^{i+j}}$. Ainsi :

$$CD(v) = \sum_{i=0}^{\infty} (C \langle D, \xi_i \rangle)(v^{\ell^i}) = \sum_{i,j \geq 0} \left\langle C \langle D, \xi_i \rangle, \xi_j^{\ell^i} \right\rangle v^{\ell^{i+j}} = \sum_{i,j \geq 0} \left[C \otimes D, \xi_i \otimes \xi_j^{\ell^i} \right] v^{\ell^{i+j}} .$$

Par ailleurs, on a :

$$CD(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle CD, \xi_k \rangle v^{\ell^k} .$$

Pour d assez grand, on peut identifier les coefficients devant v^{ℓ^k} dans les deux expressions précédentes, ce qui donne l'identité suivante dans $H^{\star,\star}$:

$$\langle CD, \xi_k \rangle = \sum_{i=0}^{k} \left[C \otimes D, \xi_i \otimes \xi_{k-i}^{\ell^i} \right] .$$

Ceci établit la première identité. La deuxième s'obtient de la même façon en calculant $CD(u)$.

5.4 La base de Milnor

Lemme 5.4.1 *Soit $\varphi \colon A_{\star,\star} \to H^{\star,\star}$ une application linéaire-$H^{\star,\star}$ appliquant $A_{i,j}$ dans $H^{p-i,q-j}$ pour un certain couple $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$. Il existe un unique élément $F \in A^{p,q}$ tel que pour tout $\alpha \in A_{\star,\star}$, on ait $\varphi(\alpha) = \langle F, \alpha \rangle$.*

Ceci s'obtient par un simple raisonnement utilisant le poids, la base des monômes admissibles de $A^{\star,\star}$ comme $H^{\star,\star}$-module et la base duale de $A_{\star,\star}$ comme module-$H^{\star,\star}$ formée des éléments $\theta(I)^\star$ (cf. lemme 5.2.3).

Pour $(\varepsilon_\bullet) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$ et $(r_\bullet) = (r_1, r_2, \dots)$ des suites d'entiers comme dans la définition 5.2.14, on note $\tau_\bullet^{\varepsilon_\bullet} = \tau_0^{\varepsilon_0} \tau_1^{\varepsilon_1} \dots$ et $\xi_\bullet^{r_\bullet} = \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \dots$, ce qui définit un élément $\tau_\bullet^{\varepsilon_\bullet} \xi_\bullet^{r_\bullet} \in A_{\star,\star}$. C'est la façon dont on notera ici les éléments de $A_{\star,\star}$ qui étaient notés $\omega(I)$ dans la définition 5.2.14 et qui en constituent une base comme module-$H^{\star,\star}$ d'après le corollaire 5.2.16. On les désignera parfois sous le simple nom de « monôme ».

Définition 5.4.2 (Base de Milnor) *Pour $(\varepsilon_\bullet)$ et $(r_\bullet)$ comme ci-dessus, on note $\rho(\varepsilon_\bullet, r_\bullet)$ l'élément de $A^{\star,\star}$ caractérisé grâce au lemme 5.4.1 par le fait que*

$$\left\langle \rho(\varepsilon_\bullet, r_\bullet), \tau_\bullet^{\varepsilon'_\bullet} \xi_\bullet^{r'_\bullet} \right\rangle$$

vaut 1 si $\varepsilon_\bullet = \varepsilon'_\bullet$ et $r_\bullet = r'_\bullet$ et 0 sinon. En utilisant que les monômes $\tau_\bullet^{\varepsilon_\bullet} \xi_\bullet^{r_\bullet}$ forment une base de $A_{\star,\star}$ comme module-$H^{\star,\star}$, on obtient facilement que les éléments $\rho(\varepsilon_\bullet, r_\bullet)$ constituent une base de $A^{\star,\star}$ comme $H^{\star,\star}$-module. Cette base est appelée la base de Milnor.

Définition 5.4.3 *Notons $I \subset A_{\star,\star}$ le sous-module-$H^{\star,\star}$ libre de base les monômes $\tau_\bullet^{\varepsilon_\bullet} \xi_\bullet^{r_\bullet}$ tels que $(r_\bullet) \neq 0$. C'est aussi l'idéal (bilatère) de $A_{\star,\star}$ engendré par les éléments ξ_k pour $k \geq 1$.*

Définition 5.4.4 *On note $B^{\star,\star} \subset A^{\star,\star}$ le sous-$H^{\star,\star}$-module formé des éléments $F \in A^{\star,\star}$ tels que pour tout $\alpha \in I$, on ait $\langle F, \alpha \rangle = 0$.*

Proposition 5.4.5 *$B^{\star,\star}$ est une sous-$H^{\star,\star}$-algèbre de $A^{\star,\star}$. En tant que $H^{\star,\star}$-module, $B^{\star,\star}$ est libre de base l'ensemble des éléments $\rho(\varepsilon_\bullet, 0)$ (notés $Q(\varepsilon_\bullet)$) pour $\varepsilon_\bullet$ parcourant les suites à valeurs dans $\{0,1\}$ nulles à partir d'un certain rang.*

Le fait que les $Q(\varepsilon_\bullet)$ forment une base de $B^{\star,\star}$ comme $H^{\star,\star}$-module est évident à partir de la définition de I. Pour montrer que $B^{\star,\star}$ est un sous-anneau de $A^{\star,\star}$, il convient en premier lieu d'observer que l'identité appartient à $B^{\star,\star}$, ce qu'on obtient en faisant la vérification (facile) de l'identité $Q(0,0,\dots) = \mathrm{Id}$. Il s'agit en second lieu de vérifier que si C et D appartiennent à $B^{\star,\star}$, alors CD aussi. Il s'agit alors de montrer que pour tout $\alpha \in I$, $\langle CD, \alpha\rangle = [C\otimes D, \Psi_\star \alpha] = 0$. Pour $\beta,\gamma \in A_{\star,\star}$, on a :

$$[C\otimes D, \beta\otimes\gamma] = \langle C\langle D,\beta\rangle,\gamma\rangle = \langle C, \lambda^\star(\langle D,\beta\rangle)\gamma\rangle\ .$$

Cet accouplement est nul si β ou γ est dans I. C'est évident si $\beta \in I$; si $\gamma \in I$, $\lambda^\star(\langle D,\beta\rangle)\gamma$ appartient aussi à I puisque I est un idéal et donc C est bien orthogonal à $\lambda^\star(\langle D,\beta\rangle)\gamma$.

Pour montrer que $[C\otimes D, \Psi_\star\alpha] = 0$, il suffit de montrer que $\Psi_\star\alpha$ appartient au sous-groupe $I\otimes A_{\star,\star} + A_{\star,\star}\otimes I$. Ce sous-groupe étant un idéal de $A_{\star,\star}\otimes_{H^{\star,\star},\lambda} A_{\star,\star}$ et $\Psi_\star$ étant un morphisme d'anneaux, il suffit d'obtenir cette propriété pour $\alpha = \xi_k$ avec $k \geq 1$, ce que fournit la proposition 5.3.8. Ceci achève la démonstration de la proposition et incite à procéder à la définition suivante :

Définition 5.4.6 *On note $\overline{\Psi}_\star \colon A_{\star,\star}/I \to (A_{\star,\star}/I)\otimes_{H^{\star,\star},\lambda}(A_{\star,\star}/I)$ le morphisme induit par $\Psi_\star\colon A_{\star,\star}\to A_{\star,\star}\otimes_{H^{\star,\star},\lambda} A_{\star,\star}$.*

L'accouplement de la définition 5.3.3 induit un accouplement noté pareillement :

$$[\cdot,\cdot]\colon\ (B^{\star,\star}\otimes_{\rho,H^{\star,\star}} B^{\star,\star})\times((A_{\star,\star}/I)\otimes_{H^{\star,\star},\lambda}(A_{\star,\star}/I)) \to H^{\star,\star}\ .$$

Définition 5.4.7 *Pour toute partie finie $X \subset \mathbf{N}$, on note $Q(X) = Q(\varepsilon_\bullet)$ et $\tau(X) = \tau_\bullet^{\varepsilon_\bullet}$ où $\varepsilon\colon \mathbf{N}\to\{0,1\}$ est la fonction caractéristique de X. Pour tout $i\in\mathbf{N}$, on note $Q_i = Q(\{i\}) \in A^{2(\ell^i-1)+1,\ell^i-1}$.*

Si $\ell = 2$, on note aussi $Q(n) = Q(\varepsilon_\bullet)$ et $\tau(n) = \tau_\bullet^{\varepsilon_\bullet}$ quand $n = \sum_{i=0}^\infty \varepsilon_i 2^i$. En particulier, $Q(2^i) = Q_i$.

Proposition 5.4.8 *Pour toute partie finie $X\subset\mathbf{N}$, on a :*

$$\overline{\Psi}_\star\tau(X) = \sum_{A\sqcup B = X}(-1)^{\#\,\mathrm{Inv}(A,B)}\tau(A)\otimes\tau(B)\ ,$$

où la somme est indexée par l'ensemble des partitions de X en deux parties A et B et où $\mathrm{Inv}(A,B) = \{(a,b)\in A\times B, a>b\}$.

La formule est exacte si X est vide ou si $X=\{i\}$ car $\overline{\Psi}_\star\tau_i = \xi_0\otimes\tau_i + \tau_i\otimes\xi_0$ (cf. proposition 5.3.8).

Corollaire 5.4.9 *Si A et B sont deux parties finies de $\mathbf{N}$, alors*

$$Q(B)Q(A) = \begin{cases} (-1)^{\# Inv(A,B)}Q(A\sqcup B) & \textit{si } A \textit{ et } B \textit{ sont disjointes}\\ 0 & \textit{sinon}\end{cases}$$

En particulier, $Q_i^2 = Q_iQ_i = 0$ pour tout $i\geq 0$.

On peut écrire

$$Q(B)Q(A) = \sum_{\substack{X\subset\mathbf{N}\\ X \text{ finie}}}\lambda_X Q(X)$$

avec $\lambda_X = \langle Q(B)Q(A),\tau(X)\rangle \in H^{\star,\star}$. On a :

$$\lambda_X = \left[Q(B)\otimes Q(A), \overline{\Psi}_\star\tau(X)\right] = \sum_{A'\sqcup B' = X}(-1)^{\#\,\mathrm{Inv}(A',B')}\left[Q(B)\otimes Q(A),\tau(A')\otimes\tau(B')\right]$$

Il vient aussitôt que :

$$\lambda_X = \begin{cases}(-1)^{\#\,\mathrm{Inv}(A,B)} & \text{si } X = A\sqcup B\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Ceci permet de conclure.

Corollaire 5.4.10 *La sous-$\mathbf{F}_\ell$-algèbre de $B^{\star,\star}$ engendrée par les opérations Q_i pour $i \geq 0$ est une algèbre alternée.*

Le lecteur intéressé par les signes prendra garde au fait que si $X = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ alors $Q(X) = Q_{i_k} \dots Q_{i_1}$ (qui ne coïncide qu'au signe près avec $Q_{i_1} \dots Q_{i_k}$).

Proposition 5.4.11 *Dans $A^{1,0}$, on a : $Q_0 = \beta$.*

Pour des raisons de poids, la décomposition de β sur la base de Milnor est de la forme $\beta = \langle \beta, \xi_0 \rangle \operatorname{Id} + \langle \beta, \tau_0 \rangle Q_0 = \langle \beta, \tau_0 \rangle Q_0$ car $\langle \beta, \xi_0 \rangle = \beta(1) = 0$. Il reste à montrer que $\langle \beta, \tau_0 \rangle = 1$, ce qui résulte de la formule pour $\lambda^\star(u)$ du corollaire 5.2.7 et de l'identité $\beta(u) = v$.

Proposition 5.4.12 *La comultiplication $\Psi^\star \colon A^{\star,\star} \to A^{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} A^{\star,\star}$ induit une comultiplication $B^{\star,\star} \to B^{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} B^{\star,\star}$.*

Il est évident que $B^{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} B^{\star,\star}$ s'identifie à l'orthogonal de $I \otimes A_{\star,\star} + A_{\star,\star} \otimes I$ pour l'accouplement de la définition 5.2.8. Pour montrer que $\Psi^\star$ induit une comultiplication sur $B^{\star,\star}$, il suffit donc de montrer que si $C \in B^{\star,\star}$ (c'est-à-dire que C est orthogonal à I), alors pour tous β et γ dans $A_{\star,\star}$, on a $\langle \Psi^\star C, \beta \otimes \gamma \rangle = 0$ si β ou γ est dans I. Comme $\langle \Psi^\star C, \beta \otimes \gamma \rangle = \langle C, \beta\gamma \rangle$, il suffit d'observer que si β ou γ est dans I, alors $\beta\gamma \in I$ aussi puisque I est un idéal.

Proposition 5.4.13
- *Si $\ell \neq 2$, $\Psi^\star Q_i = Q_i \otimes \operatorname{Id} + \operatorname{Id} \otimes Q_i$ pour $i \geq 0$.*
- *Si $\ell = 2$, pour tout $n \geq 0$, $\Psi^\star Q(n) = \sum_{p+q=n} \rho^{\sigma(p,q)} Q(p) \otimes Q(q)$ où l'on note $\sigma(p,q)$ le nombre de retenues qui interviennent lorsque l'on pose l'addition de p et q en base 2. En particulier, pour $n = 2^i$:*

$$\Psi^\star Q_i = Q_i \otimes \operatorname{Id} + \operatorname{Id} \otimes Q_i + \sum_{k=1}^{2^i-1} \rho^{i - v_2(k)} Q(k) \otimes Q(2^i - k) ,$$

où v_2 désigne la valuation 2-adique.

Soit X une partie finie de $\mathbf{N}$. D'après la proposition 5.4.12, on peut écrire

$$\Psi^\star Q(X) = \sum_{(A,B)} \lambda_{A,B} Q(A) \otimes Q(B) ,$$

où (A,B) parcourt les couples de parties finies de $\mathbf{N}$. On a :

$$\lambda_{A,B} = (-1)^{\# A \cdot \# B} \langle \Psi^\star Q(X), \tau(A) \otimes \tau(B) \rangle = (-1)^{\# A \cdot \# B} \langle Q(X), \tau(A)\tau(B) \rangle \ .$$

Si $\ell \neq 2$ et $X = \{i\}$, pour qu'un coefficient $\lambda_{A,B}$ soit non nul, il faut que $\tau(A)\tau(B)$ soit non nul, c'est-à-dire que A et B soient disjointes auquel cas $\tau(A)\tau(B) = (-1)^{\# \operatorname{Inv}(A,B)} \tau(A \sqcup B)$ et l'accouplement $\langle Q(X), \tau(A \sqcup B) \rangle$ ne peut-être non nul que si $A \sqcup B = \{i\}$. On obtient facilement que $\lambda_{\{i\},\emptyset} = \lambda_{\emptyset,\{i\}} = 1$, ce qui permet de conclure.

Si $\ell = 2$, en utilisant le lemme suivant, la même méthode permet d'obtenir la formule générale pour $\Psi^\star Q(n)$ pour tout $n \geq 0$.

Lemme 5.4.14 *Si $\ell = 2$, alors pour tous $p, q \geq 0$, on a l'identité $\tau(p)\tau(q) = \tau(p+q)\rho^{\sigma(p,q)}$ dans le quotient $A_{\star,\star}/I$.*

Si on raisonne modulo I, le théorème 5.2.13 fournit l'identité $\tau_i^2 = \tau_{i+1}\rho$ ce qui est la compatibilité cherchée dans le cas particulier $p = q = 2^i$. Il est par ailleurs évident que si l'addition de p et de q en base 2 ne provoque aucune retenue, on a $\tau(p)\tau(q) = \tau(p+q)$. Le cas général résulte de ces deux cas particuliers.

Définition 5.4.15 *Les éléments $\rho((0,0,\dots), r_\bullet)$ de la base de Milnor correspondant aux couples de suites $(\varepsilon_\bullet, r_\bullet)$ tels que $\varepsilon_i = 0$ pour tout $i \geq 0$ sont notés $\mathscr{P}^{(r_\bullet)}$.*

Proposition 5.4.16 *Pour tout couple $(\varepsilon_\bullet),(r_\bullet)$ de suites d'entiers nulles à partir d'un certain rang, $\varepsilon_\bullet$ n'étant constituée que de 0 et de 1, on a l'identité suivante dans $A^{\star,\star}$:*

$$\rho(\varepsilon_\bullet,r_\bullet)=Q(\varepsilon_\bullet)\mathscr{P}^{(r_\bullet)}\ .$$

Le coefficient $\lambda_{(\varepsilon'_\bullet,r'_\bullet)}$ devant $\rho(\varepsilon',r'_\bullet)$ dans la décomposition de $Q(\varepsilon_\bullet)\mathscr{P}^{(r_\bullet)}$ sur la base de Milnor est

$$\lambda_{(\varepsilon'_\bullet,r'_\bullet)}=\left[Q(\varepsilon_\bullet)\otimes\mathscr{P}^{(r_\bullet)},\Psi_\star(\tau_\bullet^{\varepsilon'_\bullet}\xi_\bullet^{r'_\bullet})\right]$$

Comme $Q(\varepsilon_\bullet)$ est orthogonal à l'idéal I de $A_{\star,\star}$, il suffit de calculer l'image $\tilde{\Psi}_\star(\tau_\bullet^{\varepsilon'_\bullet}\xi_\bullet^{r'_\bullet})$ dans l'anneau quotient $A_{\star,\star}\otimes_{H^{\star,\star},\lambda}(A_{\star,\star}/I)$ puisque l'accouplement $\left[Q(\varepsilon_\bullet)\otimes\mathscr{P}^{(r_\bullet)},\cdot\right]$ se factorise par ce quotient (l'argument est le même que dans la démonstration de la proposition 5.4.5). Grâce à la proposition 5.3.8, on dispose des formules suivantes :

$$\tilde{\Psi}_\star\xi_k=\xi_k\otimes\xi_0\qquad\tilde{\Psi}_\star\tau_k=\xi_0\otimes\tau_k+\tau_k\otimes\xi_0$$

Si on note $I'=\{i\in\mathbf{N},\varepsilon'_i=1\}$, on en déduit :

$$\tilde{\Psi}_\star(\tau_\bullet^{\varepsilon'_\bullet}\xi_\bullet^{r'_\bullet})=\sum_{A\sqcup B=I'}(-1)^{\#\operatorname{Inv}(A,B)}\tau(A)\xi_\bullet^{r'_\bullet}\otimes\tau(B)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\lambda_{(\varepsilon'_\bullet,r'_\bullet)}&=\sum_{A\sqcup B=I'}(-1)^{\#\operatorname{Inv}(A,B)}\left[Q(\varepsilon_\bullet)\otimes\mathscr{P}^{(r_\bullet)},\tau(A)\xi_\bullet^{r'_\bullet}\otimes\tau(B)\right]\\&=\sum_{A\sqcup B=I'}(-1)^{\#\operatorname{Inv}(A,B)}\left\langle Q(\varepsilon_\bullet)\left\langle\mathscr{P}^{(r_\bullet)},\tau(A)\xi_\bullet^{r'_\bullet}\right\rangle,\tau(B)\right\rangle\end{aligned}$$

On voit immédiatement que seul le terme correspondant à $A=\emptyset$ (et donc $B=I'$) peut contribuer à cette somme. Ensuite, il vient que le résultat $\lambda_{(\varepsilon'_\bullet,r'_\bullet)}$ ne peut être non nul que si $r'_\bullet=r_\bullet$ et $\varepsilon'_\bullet=\varepsilon_\bullet$ auquel cas le coefficient vaut bien 1.

Proposition 5.4.17 *Pour tout $n\geq 1$, on a $Q_n=[q_n,\beta]=q_n\beta-\beta q_n$, où $q_n\in A^{\star,\star}$ est l'élément de la base de Milnor $q_n=\mathscr{P}^{(r_\bullet)}$ où $r_i=\delta_{in}$ (autrement dit, q_n est dual du monôme ξ_n).*

Il s'agit de décomposer $q_n\beta$ sur la base de Milnor à laquelle appartiennent Q_n et βq_n (cf. proposition 5.4.16). Pour tout $(\varepsilon_\bullet,r_\bullet)$, le coefficient $\lambda_{(\varepsilon_\bullet,r_\bullet)}$ devant $\rho(\varepsilon_\bullet,r_\bullet)$ dans la décomposition de $q_n\beta$ est :

$$\lambda_{(\varepsilon_\bullet,r_\bullet)}=[q_n\otimes\beta,\Psi_\star(\tau_\bullet^{\varepsilon_\bullet}\xi_\bullet^{r_\bullet})]\ .$$

Notons J l'idéal de $A_{\star,\star}$ engendré par τ_k pour $k\geq 1$. L'accouplement $[q_n\otimes\beta,\cdot]$ se factorise par l'anneau quotient $(A_{\star,\star}/I+J)\otimes_{H^{\star,\star},\lambda}A_{\star,\star}$. Notons $\breve{\Psi}_\star\colon A_{\star,\star}\to(A_{\star,\star}/I+J)\otimes_{H^{\star,\star},\lambda}A_{\star,\star}$ le morphisme induit par $\Psi_\star$. D'après la proposition 5.3.8, on a :

$$\breve{\Psi}^\star\xi_k=\xi_0\otimes\xi_k\qquad\breve{\Psi}^\star\tau_k=\xi_0\otimes\tau_k+\tau_0\otimes\xi_k$$

L'anneau quotient $A_{\star,\star}/I+J$ étant un module-$H^{\star,\star}$ libre de base (ξ_0,τ_0) (avec la relation $\tau_0^2=0$), on obtient aisément que si $X=\{i\in\mathbf{N},\varepsilon_i=1\}=\{x_1<x_2<\cdots<x_k\}$, alors :

$$\breve{\Psi}^\star(\tau(X))=\xi_0\otimes\tau(X)+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\tau_0\otimes\tau(X-\{x_i\})\xi_{x_i}\ \text{, d'où}$$

$$\breve{\Psi}^\star(\tau_\bullet^{\varepsilon_\bullet}\xi_\bullet^{r_\bullet})=\xi_0\otimes\tau_\bullet^{\varepsilon_\bullet}\xi_\bullet^{r_\bullet}+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\tau_0\otimes\tau(X-\{x_i\})\xi_{x_i}\xi_\bullet^{r_\bullet}\ .$$

Il en résulte que :

$$\lambda_{(\varepsilon_\bullet,r_\bullet)} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \left\langle q_n, \tau(X-\{x_i\})\xi_{x_i}\xi_\bullet^{r_\bullet}\right\rangle \ .$$

Pour que ce coefficient $\lambda_{(\varepsilon_\bullet,r_\bullet)}$ soit non nul, il faut donc que X soit un singleton. Dans ce cas, notons x l'unique entier naturel appartenant à $X = \{i, \varepsilon_i = 1\}$. On a alors :

$$\lambda_{(\varepsilon_\bullet,r_\bullet)} = \left\langle q_n, \xi_x\xi_\bullet^{r_\bullet}\right\rangle \ .$$

L'élément $\xi_x\xi_\bullet^{r_\bullet}$ est égal à un monôme en les ξ_j pour $j \geq 1$, mais l'unité ξ_0 peut se cacher dans son expression si $x = 0$. Le coefficient $\lambda_{(\varepsilon_\bullet,r_\bullet)}$ vaut donc 1 si ce monôme $\xi_x\xi_\bullet^{r_\bullet}$ est ξ_n et 0 sinon. Le coefficient $\lambda_{(\varepsilon_\bullet,r_\bullet)}$ vaut 1 dans les deux cas suivants :

- $x = 0$ et $\xi_\bullet^{r_\bullet} = \xi_n$, de sorte que $\tau_\bullet^{\varepsilon_\bullet}\xi_\bullet^{r_\bullet} = \tau_0\xi_n$ et l'élément correspondant de la base de Milnor est βq_n d'après la proposition 5.4.16.
- $x = n$ et $\xi_\bullet^{r_\bullet} = \xi_0$, de sorte que $\tau_\bullet^{\varepsilon_\bullet}\xi_\bullet^{r_\bullet} = \tau_n$ et l'élément correspondant de la base de Milnor est Q_n.

On a ainsi établi l'identité $q_n\beta = Q_n + \beta q_n$.

Proposition 5.4.18 *Pour tout entier $n \geq 0$, l'opération P^n appartient à la base de Milnor : $P^n = \mathscr{P}^{(n,0,0,\dots)}$.*

Il s'agit de montrer que P^n est dual du monôme ξ_1^n. D'après la proposition 5.2.15, on a $\langle P^n, \tau_\bullet^{\varepsilon_\bullet}\xi_\bullet^{r_\bullet}\rangle = 0$ si $(0,n,0,\dots) < (\varepsilon_0, r_1, \varepsilon_1, r_2, \dots)$ pour l'ordre lexicographique pour les suites lues de droite à gauche. Les seules suites $(\varepsilon_0, r_1, \varepsilon_2, \dots)$ qu'il reste à considérer sont celles de la forme $(0,k,0,\dots)$ avec $k \leq n$ et $(1,k,0,\dots)$ avec $k < n$. En examinant les bidegrés des éléments de $H^{\star,\star}$ de la forme $\left\langle P^n, \xi_1^k\right\rangle$ ou $\left\langle P^n, \tau_0^{\varepsilon_0}\xi_1^k\right\rangle$, on peut éliminer un certain nombre de cas. Il ne reste alors plus qu'à montrer que $\langle P^n, \xi_1^n\rangle = 1$ et que $\left\langle P^n, \tau_0\xi_1^{n-1}\right\rangle = 0$, ce qui se démontre aisément par récurrence sur n en utilisant les formules pour $\Psi^\star P^n$ et les identités suivantes :

$$\langle P^n, \xi_1^n\rangle = \left\langle \Psi^\star P^n, \xi_1^{n-1}\otimes\xi_1\right\rangle \qquad \left\langle P^n, \tau_0\xi_1^{n-1}\right\rangle = \left\langle \Psi^\star P^n, \xi_1^{n-1}\otimes\tau_0\right\rangle \ .$$

5.5 Action sur les classes de Chern et les classes de Thom

On se propose de décrire l'action des éléments $\rho(\varepsilon_\bullet, r_\bullet) = Q(\varepsilon_\bullet)\mathscr{P}^{(r_\bullet)}$ de la base de Milnor de $A^{\star,\star}$ sur les classes de Chern $c_i(V) \in H^{2i,i}(X)$ et de Thom $t_V \in \widetilde{H}^{2r,r}(\mathrm{Th}_X V)$ pour des fibrés vectoriels V de rang r sur $X \in Sm/k$. Une évidence à remarquer dès maintenant est que si $(\varepsilon_\bullet) \neq 0$, $\rho(\varepsilon_\bullet, r_\bullet)$ s'annule sur toutes ces classes puisque l'image appartient à un groupe de la forme $H^{2w+e,w}(X)$ ou $\widetilde{H}^{2w+e,w}(\mathrm{Th}_X V)$ avec $e = \sum_i \varepsilon_i > 0$. Le seul cas intéressant à étudier est celui de l'action des opérations $\mathscr{P}^{(r_\bullet)}$ sur ces classes.

Proposition 5.5.1 *Soit $X \in Sm/k$. Soit L un fibré en droites sur X. Alors :*

$$\lambda^\star(c_1(L)) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \otimes c_1(L)^{\ell^k} \in A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} H^{\star,\star}(X) \ .$$

La formule est déjà connue pour $X = \mathbf{P}^{n-1}$ (pour $n \geq 1$) et $c_1(\mathscr{O}(1))$. Le cas général vient de ce que pour n assez grand, il existe un morphisme $f\colon X \to \mathbf{P}^{n-1}$ dans $\mathcal{H}(k)$ tel que $f^\star(c_1(\mathscr{O}(1))) = c_1(L)$. Si L est engendré par n sections globales (par exemple si X est affine et n assez grand), on peut en effet trouver un morphisme $f\colon X \to \mathbf{P}^{n-1}$ dans Sm/k tel que $f^\star(\mathscr{O}(1)) \simeq L$. Le cas général s'en déduit par l'astuce de Jouanolou.

Proposition 5.5.2 *Soit $(r_\bullet) = (r_1, r_2, \dots)$ une suite d'entiers naturels nulle à partir d'un certain rang. Soit $i \geq 0$. Soit d un entier naturel. On note $P \in \mathbf{F}_\ell[X_1, \dots, X_d]$ le polynôme symétrique*

$$P = \sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,d\}\\ \#J=i}} \ \sum_{\substack{k\colon J\to\mathbf{N}\\ \prod_{j\in J}\xi_{k_j}=\xi_\bullet^{r_\bullet}}} \ \prod_{j\in J} X_i^{\ell^{k_j}} \ .$$

On note $R \in \mathbf{F}_\ell[C_1, \dots, C_d]$ l'unique polynôme tel que si on note $S_j \in \mathbf{F}_\ell[X_1, \dots, X_d]$ la j-ième fonction symétrique élémentaire des variables $X_1, \dots, X_d$, on ait $P = R(S_1, \dots, S_d)$. Alors, pour tout fibré vectoriel V sur $X \in Sm/k$ de rang $\leq d$, on a :

$$\mathscr{P}^{(r_\bullet)}(c_i(V)) = R(c_1(V), \dots, c_d(V)) \in H^{\star,\star}(X) \ .$$

(Pour des raisons de degrés évidentes, le polynôme $R \in \mathbf{F}_\ell[S_1, \dots, S_d]$ se stabilise pour d assez grand, $r_\bullet$ et i étant fixés.)

D'après le principe de scindage, si V est un fibré vectoriel de rang d, il existe un morphisme $p \colon Y \to X$ tel que $p^\star V$ soit isomorphe à une somme directe de d fibrés en droites et tel que $p^\star \colon H^{\star,\star}(X) \to H^{\star,\star}(Y)$ soit injectif. On peut donc supposer que $V = L_1 \oplus \dots \oplus L_d$ où pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, L_j est un fibré en droites sur X. On note $x_i = c_1(L_j) \in H^{\star,\star}(X)$. On a :

$$c_i(V) = S_i(x_1, \dots, x_d) = \sum_{\substack{J \subset \{1,\dots,d\} \\ \# J = i}} \prod_{j \in J} x_j \ .$$

Comme $\lambda^\star(x_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \otimes x_j^{\ell^k}$ et que $\lambda^\star$ est un morphisme d'anneaux, on obtient :

$$\lambda^\star(c_i(V)) = \sum_{\substack{J \subset \{1,\dots,d\} \\ \# J = i}} \sum_{k \colon J \to \mathbf{N}} \prod_{j \in J} \xi_{k_j} \otimes x_j^{\ell^{k_j}} \ .$$

Par conséquent :

$$\mathscr{P}^{(r_\bullet)}(c_i(V)) = \left\langle \mathscr{P}^{(r_\bullet)}, \lambda^\star(c_i(V)) \right\rangle = P(x_1, \dots, x_d) = R(c_1(V), \dots, c_d(V)) \ .$$

Proposition 5.5.3 *Soit $(r_\bullet) = (r_1, r_2, \dots)$ une suite d'entiers naturels nulle à partir d'un certain rang. Soit d un entier naturel. On note $P \in \mathbf{F}_\ell[X_1, \dots, X_d]$ le polynôme symétrique*

$$P = \sum_{\substack{(k_1,\dots,k_d) \in \mathbf{N}^d \\ \xi_{k_1} \cdots \xi_{k_d} = \xi_\bullet^{r_\bullet}}} \prod_{j=1}^{d} X_j^{\ell^{k_j} - 1} \ .$$

On note $R \in \mathbf{F}_\ell[C_1, \dots, C_d]$ l'unique polynôme tel que si on note $S_j \in \mathbf{F}_\ell[X_1, \dots, X_d]$ la j-ième fonction symétrique élémentaire des variables $X_1, \dots, X_d$, on ait $P = R(S_1, \dots, S_d)$. Alors, pour tout fibré vectoriel V sur $X \in Sm/k$ de rang $\leq d$, on a :

$$\mathscr{P}^{(r_\bullet)}(t_V) = R(c_1(V), \dots, c_d(V)) \cdot t_V \in H^{\star,\star}(\mathrm{Th}_X V) \ .$$

(L'entier i et la suite $(r_\bullet)$ étant fixés, le polynôme R se stabilise dès que $d \geq \sum_i (\ell^i - 1) r_i$.)

La démonstration est essentiellement la même que celle de la proposition 5.5.2. Il suffit de remplacer dans le raisonnement l'expression de $\lambda^\star(c_1(L))$ pour L un fibré en droites par la formule du lemme suivant :

Lemme 5.5.4 *Soit $X \in Sm/k$. Soit L un fibré en droites sur X. Alors :*

$$\lambda^\star(t_L) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \otimes c_1(L)^{\ell^k - 1} t_L \in A_{\star,\star} \otimes_{H^{\star,\star}} \widetilde{H}^{\star,\star}(\mathrm{Th}_X L) \ .$$

On utilise le plongement canonique de $\widetilde{H}^{\star,\star}(\mathrm{Th}_X L)$ dans $H^{\star,\star}(\mathbf{P}(V \oplus \mathscr{O}_X))$. On a alors $t_L = c_1(\mathscr{O}(1)) + c_1(L)$. En appliquant la proposition 5.5.1 aux fibrés en droites $\mathscr{O}(1)$ et L, on obtient :

$$\lambda^\star(t_L) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \otimes (c_1(\mathscr{O}(1))^{\ell^k} + c_1(L)^{\ell^k}) \ .$$

Il ne reste plus qu'à montrer que

$$c_1(\mathscr{O}(1))^{\ell^k} + c_1(L)^{\ell^k} = c_1(L)^{\ell^k - 1} c_1(\mathscr{O}(1)) + c_1(L)^{\ell^k} = c_1(L)^{\ell^k - 1} t_L \ ,$$

ce qui se déduit facilement de l'identité $c_1(\mathscr{O}(1))^2 + c_1(L) c_1(\mathscr{O}(1)) = 0$ dans $H^{\star,\star}(\mathbf{P}(V \oplus \mathscr{O}_X))$.

Corollaire 5.5.5 *Pour tout $j \geq 0$, on note $s_j \colon K_0(X) \to \oplus_i H^{2i,i}(X)$ la transformation naturelle additive pour $X \in Sm/k$ telle que pour tout fibré en droites L, $s_j([L]) = c_1(L)^j$. Alors, pour tout $n \geq 1$ et tout fibré vectoriel V sur $X \in Sm/k$, on a :*

$$q_n(t_V) = s_{\ell^n - 1}(V) \cdot t_V$$

où $q_n \in A^{\star,\star}$ est l'élément dual du monôme ξ_n introduit dans la proposition 5.4.17.

(En effet, avec les notations de la proposition 5.5.3, on a $P = \sum_{i=1}^d X_i^{\ell^j - 1}$.)

6 Endomorphismes du spectre représentant la cohomologie motivique

Soit ℓ un nombre premier. Soit k un corps parfait. Notons $\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell} \in \mathcal{SH}(k)$ le spectre représentant la cohomologie motivique à coefficients $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ (cf. [15, §6.1]). Il est constitué d'une suite d'espaces $K(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}(n), 2n)$ qui sont exactement les espaces K_n de la définition 1.6.1 (pour $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$). Les morphismes d'assemblage $(\mathbf{A}^1/\mathbf{A}^1 - \{0\}) \wedge K_n \to K_{n+1}$ sont donnés par la multiplication par les morphismes tautologiques $\tau_{\mathbf{A}^1} \colon \mathbf{A}^1/\mathbf{A}^1 - \{0\} \to K_1$ (cf. proposition 1.6.2).

Pour ainsi dire par définition des opérations cohomologiques stables et de la catégorie $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(k)$ de [11, §6], le groupe des opérations cohomologiques stables de bidegré (p,q) sur la cohomologie motivique à coefficients $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ (cf. définition definition-operation-stable) s'identifie au groupe

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(k)}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell}, \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell} \wedge S^{p,q})$$

où $S^{p,q} = (\mathbf{P}^1)^q \wedge S^{p-2q} \in \mathcal{SH}(k)$ (ce qui a un sens quels que soient p et q).

Le théorème principal de [18] est alors le suivant :

Théorème 6.1 (Voevodsky [18]) *Soit ℓ un nombre premier. Soit k un corps de caractéristique zéro. L'inclusion de $A^{\star,\star}$ dans l'algèbre des opérations cohomologiques stables (cf. proposition 5.1.3) est un isomorphisme.*

Autrement dit, pour tout $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$, le morphisme canonique

$$A^{p,q} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{naïve}(k)}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell}, \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell} \wedge S^{p,q})$$

est un isomorphisme.

Le foncteur évident $\mathcal{SH}(k) \to \mathcal{SH}_{\text{naïve}}(k)$ est plein (cf. [11, Proposition 6.3]). En particulier, les application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell}, \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell} \wedge S^{p,q}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(k)}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell}, \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell} \wedge S^{p,q})\ .$$

est surjectif. Un élément du noyau d'une telle application serait un morphisme « stablement fantôme » $f \colon \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell} \to \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell} \wedge S^{p,q}$. Ceci signifie que pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(k)$, l'application

$$H^{\star,\star}(\mathcal{X}) \to H^{\star+p,\star+q}(\mathcal{X})$$

induite par f est nulle. Pour d'autres spectres que $\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell}$, il peut exister de tels f stablement fantômes et non nuls (cf. [12, Corollary 6.2.3.7]), c'est-à-dire que $f \neq 0$ mais qu'on ne peut pas détecter la non-nullité de f en l'« évaluant » sur des spectres de la forme $\mathcal{X} \wedge S^{i,j}$ avec $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(S)$.

Nous allons montrer que sous les hypothèses du théorème 6.1, ce phénomène ne se produit par pour l'anneau bigradué des endomorphismes de $\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell}$:

Théorème 6.2 *Soit ℓ un nombre premier. Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$.*

- *Il n'existe pas de morphisme stablement fantôme non nul $\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell} \to \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell} \wedge S^{p,q}$ dans $\mathcal{SH}(k)$.*

– *On dispose d'un isomorphisme canonique :*

$$A^{p,q} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell}, \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell} \wedge S^{p,q}) \ .$$

Le deuxième résulte énoncé résulte immédiatement du premier et du théorème 6.1. Nous allons donc démontrer uniquement le premier énoncé, et ce en utilisant de manière essentielle certaines étapes de la démonstration du théorème 6.1.

Si le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(k)}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell}, \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell} \wedge S^{p,q})$ s'identifie à

$$\lim_n \widetilde{H}^{2n+p,n+q}(K_n) \ ,$$

on sait d'après [11, Lemme 6.5] que le groupe des morphismes stablement fantômes $\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell} \to \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell} \wedge S^{p,q}$ s'identifie à

$$\mathbf{R}^1 \lim_n \widetilde{H}^{2n+p-1,n+q}(K_n) \ ,$$

où $\mathbf{R}^1 \lim_n$ est le premier foncteur dérivé à droite du foncteur limite projective au niveau des systèmes projectifs de groupes abéliens indexés par $\mathbf{N}$.

Les résultats importants de [18] sur les produits symétriques sont utilisés au début de la démonstration de [18, Theorem 3.49] (i.e. le théorème 6.1) pour obtenir l'existence d'objeets $M'_n \in DM^{\text{eff}}_{\leq 0}(k, \mathbf{F}_\ell)$ tel que $\widetilde{M}(K_n) \simeq M'_n(n)[2n]$.

Les morphismes $\widetilde{M}(K_n)(1)[2] \to \widetilde{M}(K_{n+1})$ induit par les morphismes d'assemblage sur $\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell}$ correspondent donc à des morphismes $M'_n \to M'_{n+1}$ dans $DM^{\text{eff}}_{\leq 0}(k, \mathbf{F}_\ell)$ (on utilise ici le « théorème de simplification »). Pour tout $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$, le système projectif $(H^{2n+p,n+q})_n$ s'identifie donc au système $(H^{p,q}(M'_n))_n$ où on rappelle que $H^{p,q}(M'_n) = \mathrm{Hom}_{DM^{\text{eff}}_{-}(k,\mathbf{F}_\ell)}(M'_n, \mathbf{F}_\ell(q)[p])$.

Comme il est établi dans la démonstration de [18, Theorem 3.49] en utilisant le résultat de scindage [18, Corollary 2.71], le triangle distingué dans $DM^{\text{eff}}_{-}(k, \mathbf{F}_\ell)$ définissant la colimite homotopique du système $(M'_n)_n$ est une suite exacte courte scindée :

$$0 \to \oplus_n M'_n \xrightarrow{i} \oplus_n M'_n \to \mathrm{hocolim}_n\, M'_n \to 0 \ .$$

Ceci repose sur le fait crucial qu'outre qu'ils existence, les objets M'_n appartiennet à la sous-catégorie $\overline{SPT}$ de $DM^{\text{eff}}_{-}(k, \mathbf{F}_\ell)$ formée des sommes diectes d'objets de la forme $\mathbf{F}_\ell(i)[2i+j]$ avec $i, j \geq 0$.

Pour tout foncteur contravariant $F \colon DM^{\text{eff}}_{-}(k, \mathbf{F}_\ell) \to \mathrm{Ab}$ transformant sommes directes en produits, on a une suite exacte :

$$0 \to \lim_n F(M'_n) \to \prod_n F(M'_n) \xrightarrow{F(i)} \prod_n F(M'_n) \to \mathbf{R}^1 \lim_n F(M'_n) \to 0 \ .$$

Le fait que i admette une rétraction implique que $F(i)$ admet une section, ce qui montre l'annulation de $\mathbf{R}^1 \lim_n F(M'_n)$. En appliquant ceci aux foncteurs $F = H^{p-1,q}$, on obtient l'annulation des groupes $\mathbf{R}^1 \lim_n H^{p-1,q}(M'_n)$, ce qui achève la démonstration du théorème 6.2.

A Le classifiant $\mathbf{B}_{\mathbf{gm}}G$

Proposition A.1 *Soit S un schéma noethérien. Soit G un schéma en groupes lisse de type fini sur S. Soit V un fibré vectoriel sur S et $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire fidèle de G (c'est-à-dire que ρ est un monomorphisme). On suppose que pour tout $i \geq 1$, on s'est donné un ouvert G-invariant U_i de l'espace affine $V^{\oplus i}$ sur lequel G agisse librement et que ceux-ci vérifient que pour tout $i \geq 1$, $U_i \times \{0\} \subset U_{i+1}$ et $U_i \times V^{\oplus i} \cup V^{\oplus i} \times U_i \subset U_{2i}$. On note $U_\infty = \mathrm{colim}_i\, U_i \in Sm/S^{\mathrm{opp}}\mathrm{Ens}$ et $(G \backslash U_\infty)_{ét}$ le faisceau étale quotient de l'action libre de G sur U_∞.*

Si on fait l'hypothèse supplémentaire que pour i assez grand il existe $u \in U_i(S)$ tel que $\mathrm{GL}(V).u \subset U_i$ alors le morphisme canonique $(G \backslash U_\infty)_{ét} \to \mathbf{B}_{ét}G$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible et U_∞ est $\mathbf{A}^1$-contractile.

Il manque un petit argument à [10] pour justifier ceci, qui est énoncé sous une forme voisine dans [10, p. 133]. Il s'agit de montrer que les ouverts U_i des $V^{\oplus i}$ constituent un « gadget admissible muni d'une bonne action de G ». Par le résultat important et technique [10, Proposition 2.6, p. 135], cela impliquera que $(G\backslash U_\infty) \to \mathbf{B}_{\text{ét}}G$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible.

Il faut montrer que pour tout G-torseur étale T sur X, le morphisme évident entre faisceaux étales quotients $(G\backslash(T\times U_i))_{\text{ét}} \to (G\backslash T)_{\text{ét}} = X$ est un épimorphisme de faisceaux pour la topologie de Nisnevich. Pour cela, il suffit (et il faut) montrer que localement Nisnevich sur X, il existe un morphisme G-équivariant $T \to U_i$. Le G-torseur T sur X se plonge de façon évidente dans le $\mathrm{GL}(V)$-torseur $T' = ((\mathrm{GL}(V) \times_S T)/G)_{\text{ét}}$ (où l'on fait agit G sur $\mathrm{GL}(V) \times_S T$ par la formule $g.(m,t) = (m\rho(g^{-1}), gt)$). Localement Nisnevich (et même Zariski) sur X, ce torseur T' est trivial. On peut donc supposer qu'il existe un isomorphisme $T' \simeq \mathrm{GL}(V)\times X$ de $\mathrm{GL}(V)$-torseurs sur X. En composant la première projection puis le morphisme $\mathrm{GL}(V) \to U_i$ donné par l'action sur l'élément u fourni par l'hypothèse de la proposition, on obtient le morphisme G-équivariant $T \to U_i$ voulu.

Remarque A.2 *Si des ouverts $U_i \subset V^{\oplus i}$ vérifient les hypothèses de la proposition A.1 pour G, alors ils les vérifient également pour l'action induite sur un sous-groupe $H \subset G$. Comme elles sont faciles à satisfaire pour $\mathrm{GL}(V)$ en définissant pour tout $i \geq 1$ pour U_i le plus grand ouvert de $V^{\oplus i}$ sur lequel $\mathrm{GL}(V)$ agisse librement (U_i paramétrise les épimorphismes $\mathbf{A}^i \to V$ de fibrés vectoriels), on obtient que la proposition s'applique pour tout schéma en groupes lisse G pour lequel on ait un monomorphisme $G \to \mathrm{GL}(V)$. On peut aussi choisir pour U_i le plus grand ouvert de $V^{\oplus i}$ sur lequel G agisse librement. Cet ouvert est plus grand que celui induit par la construction précédente pour $\mathrm{GL}(V)$.*

Remarque A.3 *Dans le cas favorable, les faisceaux étales quotients $(G\backslash U_i)_{ét}$ sont représentables par un objet de Sm/S qu'il convient de noter $G\backslash U_i$. C'est évidemment le cas si G est un groupe fini (puisque ce quotient $G\backslash U_i$ est un ouvert du quotient $G\backslash V^{\oplus i}$ de SGA 1 V 1). C'est également le cas si $G = \mathrm{GL}(V)$ et que les ouverts U_i sont ceux décrits dans la remarque A.2 : dans ce cas $G\backslash U_i$ est la grassmannienne des r-plans dans $\mathbf{A}^i$ où r est le rang de V*

Dans le cas où $S = \operatorname{Spec} k$ et G est un sous-k-schéma en groupes lisse fermé de GL_n, on peut montrer que si on prend pour U_i l'ouvert de $V^{\oplus i}$ où GL_n agit librement, alors le quotient $(G\backslash U_i)_{ét}$ est représentable (ceci se ramène facilement à la démonstration du fait que le quotient $G\backslash \mathrm{GL}_n$ soit représentable et que $\mathrm{GL}_n \to G\backslash \mathrm{GL}_n$ soit un G-torseur étale, voir SGA 3 VI$_A$ 3.2).

Proposition A.4 *Soit k un corps parfait. Soit $i\colon H \subset G$ une inclusion entre groupes finis. Ce morphisme induit un morphisme $\mathbf{B}_{ét}i\colon \mathbf{B}_{ét}H \to \mathbf{B}_{ét}G$ dans $\mathcal{H}(k)$ puis un morphisme $M(\mathbf{B}_{ét}i)\colon M(\mathbf{B}_{ét}H) \to M(\mathbf{B}_{ét}G)$ dans $DM^{eff}_{\leq 0}(k,\Lambda)$. On dispose d'un morphisme de transfert $\mathrm{Tr}\colon M(\mathbf{B}_{ét}G) \to M(\mathbf{B}_{ét}H)$ tel que le morphisme composé dans $DM^{eff}_{\leq 0}(k,\Lambda)$*

$$M(\mathbf{B}_{ét}G) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} M(\mathbf{B}_{ét}H) \xrightarrow{M(\mathbf{B}_{ét}i)} M(\mathbf{B}_{ét}G)$$

soit la multiplication par l'indice $[G : H]$.

On choisit une représentation fidèle $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ de G. Pour tout $i \geq 1$, on note U_i l'ouvert de $V^{\oplus i}$ où G (et donc H) agit librement. Les faisceaux étales quotients $(G\backslash U_i)_{\text{ét}}$ et $(H\backslash U_i)_{\text{ét}}$ sont représentables par des k-schémas lisses que l'on note $G\backslash U_i$ et $H\backslash U_i$. Les colimites $G\backslash U_\infty$ et $H\backslash U_\infty$ de ces systèmes (calculées dans la catégorie des préfaisceaux sur Sm/k, la notation est ici quelque peu abusive) s'identifient respectivement à $\mathbf{B}_{\text{ét}}G$ et $\mathbf{B}_{\text{ét}}H$ dans $\mathcal{H}(k)$ d'après la proposition A.1. On dispose du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} U_\infty \arrow[r, equal, "H\text{-équiv.}"] \arrow[d, "H\text{-torseur}"'] & U_\infty \arrow[d, "G\text{-torseur}"] \\ H\backslash U_\infty \arrow[r] & G\backslash U_\infty \end{tikzcd}$$

Il permet d'observer, ce qui va de soi, que le morphisme évident $H\backslash U_\infty \to G\backslash U_\infty$ est une façon de représenter le morphisme $\mathbf{B}_{\text{ét}}i\colon \mathbf{B}_{\text{ét}}G \to \mathbf{B}_{\text{ét}}H$ *via* les identifications précédemment faites.

Ainsi, le morphisme Tr cherché peut être représenté par un morphisme de faisceaux avec transferts obtenu en passant à la colimite le morphisme canonique $L(G\backslash U_i) \to L(H\backslash U_i)$ correspondant à la correspondance finie de $G\backslash U_i$ dans $H\backslash U_i$ associée au revêtement étale $H\backslash U_i \to G\backslash U_i$. Le morphisme composé $L(G\backslash U_\infty) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} L(H\backslash U_\infty) \to L(G\backslash U_\infty)$ est bien sûr la multiplication par le degré $[G:H]$ de ce revêtement.

Corollaire A.5 *Soit k un corps parfait. Soit $i\colon H \subset G$ une inclusion entre groupes finis. On suppose que l'indice $[G:H]$ est inversible dans l'anneau de coefficients Λ. Alors, le morphisme $M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}H) \to M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}G)$ induit par l'inclusion est un épimorphisme scindé dans $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(k,\Lambda)$.*

Plus précisément, notons N le normalisateur de H dans G. Alors, les co-invariants de N agissant sur $M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}H)$ sont représentables par un épimorphisme scindé $M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}H) \to M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}H)_N$ dans $DM^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(k,\Lambda)$. Le morphisme évident $M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}H) \to M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}G)$ induit un morphisme $M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}H)_N \to M(\mathbf{B}_{\acute{e}t}G)$ qui est un épimorphisme scindé.

La seule chose à ajouter pour ce corollaire est que l'action de N par conjugaison sur H puis sur $M(\mathbf{B}_{\text{ét}}H)$ se factorise en une action de N/H puisque les automorphismes intérieurs de H induisent l'identité sur $\mathbf{B}_{\text{ét}}H \in \mathcal{H}(k)$. La prise des co-invariants de $M(\mathbf{B}_{\text{ét}}H)$ sous N peut donc se faire par le procédé standard de moyenne pour l'action du groupe N/H dont l'ordre est bien inversible dans Λ.

Références

[1] Frédéric Déglise, *Finite correspondences and transfers over a regular base*, Algebraic cycles and motives. Vol. 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 343, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, pp. 138–205.

[2] Pierre Deligne, *Voevodsky's lectures on motivic cohomology 2000/2001*, Algebraic topology, Abel Symp., vol. 4, Springer, Berlin, 2009, pp. 355–409.

[3] H. Gillet and C. Soulé, *Intersection theory using Adams operations*, Invent. Math. **90** (1987), no. 2, 243–277.

[4] Paul G. Goerss and John F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[5] Philip S. Hirschhorn, *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[6] Mark Hovey, *Model category structures on chain complexes of sheaves*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 6, 2441–2457 (electronic).

[7] J. F. Jardine, *Simplicial presheaves*, J. Pure Appl. Algebra **47** (1987), no. 1, 35–87.

[8] J. P. Jouanolou, *Une suite exacte de Mayer-Vietoris en K-théorie algébrique*, Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Springer, Berlin, 1973, pp. 293–316. Lecture Notes in Math., Vol. 341.

[9] John Milnor, *The Steenrod algebra and its dual*, Ann. of Math. (2) **67** (1958), 150–171.

[10] Fabien Morel and Vladimir Voevodsky, *$\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1999), no. 90, 45–143 (2001).

[11] Joël Riou, *Catégorie homotopique stable d'un site suspendu avec intervalle*, Bull. Soc. Math. France **135** (2007), no. 4, 495–547.

[12] ———, *Algebraic K-theory, $\mathbf{A}^1$-homotopy and Riemann-Roch theorems*, J. Topol. **3** (2010), no. 2, 229–264.

[13] Jean-Pierre Serre, *Algèbre locale. Multiplicités*, Cours au Collège de France, 1957–1958, rédigé par Pierre Gabriel. Troisième édition. Lecture Notes in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[14] N. E. Steenrod, *Cohomology operations*, Lectures by N. E. Steenrod written and revised by D. B. A. Epstein. Annals of Mathematics Studies, No. 50, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.

[15] Vladimir Voevodsky, $\mathbf{A}^1$*-homotopy theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998), no. Extra Vol. I, 1998, pp. 579–604 (electronic).

[16] ______, *Motivic cohomology with* $\mathbf{Z}/2$*-coefficients*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2003), no. 98, 59–104. MR 2031199 (2005b :14038b)

[17] ______, *Reduced power operations in motivic cohomology*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2003), no. 98, 1–57.

[18] ______, *Motivic Eilenberg-Maclane spaces*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2010), no. 112, 1–99.

[19] ______, *Simplicial radditive functors*, J. K-Theory **5** (2010), no. 2, 201–244.

[20] ______, *On motivic cohomology with* $\mathbf{Z}/l$*-coefficients*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), no. 1, 401–438. MR 2811603

[21] Vladimir Voevodsky, Andrei Suslin, and Eric M. Friedlander, *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Annals of Mathematics Studies, vol. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.

[22] Charles A. Weibel, *Homotopy algebraic* K*-theory*, Algebraic K-theory and algebraic number theory (Honolulu, HI, 1987), Contemp. Math., vol. 83, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 461–488.