Геометрический подход к стабильным гомотопическим группам сфер II. Инвариант Кервера.

П.М.Ахметьев *

Аннотация

Представлено решение Проблемы Кервера. Вводится понятие абелевой структуры скошенно–оснащенного погружения, бициклической структуры $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенного погружения и бикватернионной структуры $\mathbb{Z}/2^{[5]}$–оснащенного погружения. Используя введенные понятия мы доказываем, что при достаточно большом n, $n = 2^l - 2$, произвольное скошенно–оснащенное погружение имеет инвариант нулевой Кервера. В доказательстве использована теорема о ретракции скошенно-оснащенного погружения в заданном классе нормального кобордизма. Доказательство теоремы о ретракции также приводится в работе.

1 Самопересечение погружений и Инвариант Кервера

Проблема Инвариантов Кервера 1 является открытой проблемой в Алгебраической топологии, см. по поводу алгебраического подхода к решению [S], [B-J-M], [C-J-M]. Мы рассмотрим геометрический подход к решению Проблемы, который основан на результатах П.Дж.Экклза [E1]. По поводу другого геометрического подхода см. [C1],[C2].

Рассмотрим гладкое погружение $f : M^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$, $n = 2^l - 2$, $l > 1$ общего положения коразмерности 1. Обозначим через $g : N^{n-2} \looparrowright \mathbb{R}^n$ погружение многообразия самопересечения.

*Работа автора поддержена грантом the London Royal Society (1998-2000), РФФИ 08-01-00663, INTAS 05-1000008-7805.

Определение 1. Инвариант Кервера погружения f определяется по формуле

$$\Theta_{sf}(f) = < \eta_N^{\frac{n-2}{2}}; [N^{n-2}] >, \qquad (1)$$

где через $\eta_N = w_2(N^{n-2})$ обозначен двумерный нормальный класс Штифеля-Уитни многообразия N^{n-2}.

Инвариант Кервера является инвариантом класса регулярного кобордизма погружения f. Более того, инвариант Кервера является гомоморфизмом

$$\Theta_{sf} : Imm^{sf}(n-1,1) \to \mathbb{Z}/2. \qquad (2)$$

Нормальное расслоение ν_g погружения $g : N^{n-2} \looparrowright \mathbb{R}^n$ является 2-мерным расслоением над N^{n-2}, которое снабжено $\mathbf{D}_4$–оснащением. Классифицирующее отображение этого расслоения (как и соответствующий характеристический класс) обозначается через $\eta_N : N^{n-2} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$. Пара (g, η_N) представляет элемент в группе кобордизма $Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2,2)$. Гомоморфизм

$$\delta_{\mathbf{D}_4} : Imm^{sf}(n-1,1) \to Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2,2) \qquad (3)$$

корректно определен.

Группа кобордизма $Imm^{sf}(n-k,k)$ обобщает группу кобордизма $Imm^{sf}(n-1,1)$. Новая группа определена как группа кобордизма троек (f, Ξ, κ_M), где $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ погружение, причем задан изоморфизм $\Xi : \nu(g) = k\kappa_M$, который называется скошенным оснащением, через $\nu(f)$ обозначено нормальное расслоение погружения f, κ_M является заданным линейным расслоением над M^{m-k}, характеристический класс которого обозначается также через $\kappa_M \in H^1(M^{m-k}; \mathbb{Z}/2)$. Отношение кобордизма на пространстве рассматриваемых троек является стандартным.

Группа $Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2,2)$ обобщается следующим образом. Определим группы кобордизмов $Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k)$. Каждый элемент группы $Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k)$ представлен тройкой (g, Ψ, η_N), где $g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ – погружение, Ψ–диэдральное оснащение в коразмерности $2k$, т.е. фиксированный изоморфизм $\Xi : \nu_g = k\eta_N$, где η_N является 2-мерным расслоением над N^{n-2k}. Характеристическое отображение этого расслоения, а также соответствующий характеристический класс (соответствующий универсальный характеристический класс) обозначается также через $\eta_N : N^{n-2k} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$, $\eta_N \in$

$H^2(N^{n-2k};\mathbb{Z}/2)$ ($\tau \in H^2(K(\mathbf{D}_4,1);\mathbb{Z}/2)$). Отображение η_N оказывается характеристическим и для расслоения ν_g, поскольку $\nu_g = k\eta_N$.

По определению гомоморфизм Кервера (2) задан композицией гомоморфизма (3) и гомоморфизма

$$\Theta_{\mathbf{D}_4} : Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2,2) \to \mathbb{Z}/2. \qquad (4)$$

Гомоморфизм (4) называется инвариантом Кервера $\mathbf{D}_4$–оснащенного погружения.

Гомоморфизм Кервера определен в более общей ситуации при помощи прямого обобщения гомоморфизмов (2) и (4):

$$\Theta^k_{sf} : Imm^{sf}(n-k,k) \to \mathbb{Z}/2, \qquad \Theta^k_{sf} := \delta^k_{\mathbf{D}_4} \circ \Theta^k_{\mathbf{D}_4}. \qquad (5)$$

$$\Theta^k_{\mathbf{D}_4} : Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k) \to \mathbb{Z}/2, \qquad \Theta^k_{\mathbf{D}_4}[(g,\Psi,\eta_N)] = \langle \eta_N^{\frac{n-2k}{2}}; [N^{n-2k}]\rangle. \ (6)$$

(Для $k=1$ новый гомоморфизм (6) совпадает с вышеопределенным гомоморфизмом (4) при этом следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc} Imm^{sf}(n-1,1) & \xrightarrow{\delta_{\mathbf{D}_4}} & Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2,2) & \xrightarrow{\Theta_{\mathbf{D}_4}} & \mathbb{Z}/2 \\ \downarrow J^k_{sf} & & \downarrow J^k_{\mathbf{D}_4} & & || \\ Imm^{sf}(n-k,k) & \xrightarrow{\delta^k_{\mathbf{D}_4}} & Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k) & \xrightarrow{\Theta^k_{\mathbf{D}_4}} & \mathbb{Z}/2. \end{array} \qquad (7)$$

Нам потребуется обобщить формулу (6) для погружений с оснащением более общего вида. Обозначим через $\mathbb{Z}/2^{[d]}$ сплетение 2^{d-1} экземпляров элементарной циклической группы. Эта группа является подгруппой в группе $O(2^{d-1})$, которая определяется следующим условием:

– Преобразования из $\mathbb{Z}/2^{[d]}$ оставляют инвариантными множество $d-1$ наборов Υ_d, Υ_{d-1}, $\dots$, Υ_2 координатных подпространств. Набор подпространств Υ_i, $2 \le i \le d$ состоит из 2^{i-1} координатных подпространств в $\mathbb{R}^{2^{d-1}}$, порожденных базисными векторами $((\mathbf{e}_1,\dots \mathbf{e}_{2^{d-i}}),\dots,(\mathbf{e}_{2^{d-1}-2^{d-i}+1},\dots,\mathbf{e}_{2^{d-1}}))$.

В частности, в новых обозначениях группа диэдра $\mathbf{D}_4$ переобозначена через $\mathbb{Z}/2^{[2]}$. Эта группа определена как подгруппа движения плоскости, переводящая набор $\Upsilon_2 = \{[e_1],[e_2]\}$ линейных подпространств в себя. В работе используются группы $\mathbb{Z}/2^{[d]}$ при $2 \le d \le 6$. По определению определено включение $\mathbb{Z}/2^{[d]} \subset \mathbb{Z}/2 \wr \Sigma(2^{d-1})$, которое совпадает с вложением 2-компоненты группы $\Sigma(2^{d-1})$ на подгруппу.

Рассмотрим погружение $g : N^{n-k2^{d-1}} \looparrowright \mathbb{R}^n$ общего положения коразмерности $k2^{d-1}$. Скажем, что погружение g является $\mathbb{Z}/2^{[d]}$–оснащенным (с кратностью k), если определен изоморфизм $\Psi : \nu_g = k\eta_N$ нормального расслоение ν_g погружения g с суммой Уитни k экземпляров 2^{d-1}–мерного расслоения η_N со структурной группой $\mathbb{Z}/2^{[d]}$.

Расслоение η_N классифицируется отображением $\eta_N : N^{n-k2^{d-1}} \to K(\mathbb{Z}/2^{[d]}, 1)$. (Соответствующий характеристический класс обозначим также через η_N). Характеристический класс универсального 2^{d-1}–мерного $\mathbb{Z}/2^{[d]}$–расслоения над $K(\mathbb{Z}/2^{[d]}, 1)$ обозначим через $\tau_{[d]}$. Таким образом, в принятых обозначениях: $\eta_N^*(\tau_{[d]}) = \eta_N$. Отображение η_N оказывается характеристическим и для расслоения ν_g, поскольку $\nu_g = k\eta_N$.

Всевозможные тройки (g, Ψ, η_N), которые были описаны выше, порождают группу кобордизма $Imm^{\mathbb{Z}/2^{[d]}}(n - k2^{d-1}, k2^{d-1})$. В некоторых рассуждениях при обозначениях будет использован дополнительный индекс, связанный со структурной группой. Например, представитель группы $Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k, 2k)$ будем иногда обозначать через $(g_{[2]}, \Psi_{[2]}, \eta_{N_{[2]}})$ и т.д.

Многообразие самопересечения произвольного $\mathbb{Z}/2^{[d]}$–оснащенного погружения является $\mathbb{Z}/2^{[d+1]}$–оснащенным погружением. Таким образом, многообразие самопересечения представляет тройку (h, Λ, ζ_L), где $h : L^{n-k2^d} \looparrowright \mathbb{R}^n$–погружение, $\Lambda : k\zeta_L = \nu_h$, $\zeta_L : L^{n-k2^d} \to K(\mathbb{Z}/2^{[d+1]}, 1)$–классифицирующее отображение 2^d–мерного расслоения ζ_L. Корректно определен гомоморфизм

$$\delta^k_{\mathbb{Z}/2^{[d+1]}} : Imm^{\mathbb{Z}/2^{[d]}}(n - k2^{d-1}, k2^{d-1}) \to Imm^{\mathbb{Z}/2^{[d+1]}}(n - k2^d, k2^d), \qquad (8)$$

ставящий в соответствие классу нормального кобордизма $[(g, \Psi, \eta_N)]$ класс нормального кобордизма $[(h, \Lambda, \zeta_L)]$.

Определена подгруппа $i_{[d+1]} : \mathbb{Z}/2^{[d]} \subset \mathbb{Z}/2^{[d+1]}$, как подгруппа преобразований подпространства $\mathbb{R}^{2^{d-1}} \subset \mathbb{R}^{2^d}$, порожденного первыми 2^{d-1} базисными векторами.

Определена подгруппа

$$\bar{i}_{[d+1]} : \mathbb{Z}/2^{[d]} \times \mathbb{Z}/2^{[d]} \subset \mathbb{Z}/2^{[d+1]} \qquad (9)$$

индекса 2, как подгруппа преобразований пространства которая состоит из преобразований, оставляющих инвариантным каждое подпространство из набора Ω_2.

Подгруппа (7) индуцирует двулистное накрытие $\pi_{[d+1]} : K(\mathbb{Z}/2^{[d]} \times \mathbb{Z}/2^{[d]}, 1) \to K(\mathbb{Z}/2^{[d+1]}, 1)$. Характеристическое отображение ζ_L :

$L^{n-k2^d} \to K(\mathbb{Z}/2^{[d+1]},1)$ индуцирует двулистное накрытие $\pi_{[d+1],L} : \bar{L}^{n-k2^d} \to L^{n-k2^d}$ из накрытия $\pi_{[d+1]}$ над классифицирующим пространством. Двулистное накрытие $\pi_{[d+1],L}$ можно определить геометрически, оно совпадает с каноническим двулистном накрытием над многообразием L^{n-k2^d} точек самопересечения $\mathbb{Z}/2^{[d]}$–оснащенного погружения (g,Ψ,η_N) (см. [A], раздел 1).

Определена проекция $p_{[d]} : \mathbb{Z}/2^{[d]} \times \mathbb{Z}/2^{[d]} \to \mathbb{Z}/2^{[d]}$ на первое слагаемое, которая индуцирует отображение $p_{[d]} : K(\mathbb{Z}/2^{[d]} \times \mathbb{Z}/2^{[d]},1) \to K(\mathbb{Z}/2^{[d]},1)$.

Для многообразия самопересечения (h,Λ,ζ_L) произвольного $\mathbb{Z}/2^{[d]}$-оснащенного погружения (g,Ψ,η_N) рассмотрим двулистное накрытие $\bar{\zeta}_L : \bar{L}^{n-k2^d}_{[d]} \to K(\mathbb{Z}/2^{[d]} \times \mathbb{Z}/2^{[d]},1)$, над классифицирующим отображением ζ_L, которое индуцировано накрытием $\pi_{[d+1],L}$. Это накрытие совпадает с каноническим 2-листным накрытием над классифицирующим отображением $\zeta_L : L^{n-k2^d} \to K(\mathbb{Z}/2^{[d+1]},1)$, которое определено из геометрических соображений. Характеристический класс $(p_{[d]} \circ \bar{\zeta})^*(\tau_{[d]}) \in H^{2^{d-1}}(\bar{L}^{n-k2^d}_{[d]};\mathbb{Z}/2)$, $\tau_{[d]} \in H^{2^{d-1}}(K(\mathbb{Z}/2^{[d]},1)$ обозначим через $\bar{\zeta}_{[d],L}$.

Определено отображение $i_{tot} = i_{[3]} \circ \dots \circ i_{[d]}$:

$$K(\mathbf{D}_4,1) \xrightarrow{i_{[3]}} K(\mathbb{Z}/2^{[3]},1) \xrightarrow{i_{[4]}} \dots \xrightarrow{i_{[d]}} K(\mathbb{Z}/2^{[d]},1) \xrightarrow{i_{[d+1]}} K(\mathbb{Z}/2^{[d+1]},1). \quad (10)$$

Определена башня 2-листных канонических накрытий

$$\bar{L}^{n-k2^d}_{[2]} \xrightarrow{\pi_{[3]}} \bar{L}^{n-k2^d}_{[3]} \xrightarrow{\pi_{[4]}} \dots \xrightarrow{\pi_{[d]}} \bar{L}^{n-k2^d}_{[d]} \xrightarrow{\pi_{[d+1]}} L^{n-k2^d}. \quad (11)$$

Эта башня накрытий снабжена характеристическим отображением в диаграмму (10) классифицирующих пространств. Обозначим через

$$\pi_{tot} = \pi_{[3]} \circ \dots \circ \pi_{[d]} : K(\mathbf{D}_4,1) \to K(\mathbb{Z}/2^{[d]},1) \quad (12)$$

башню накрытий, индуцированную композицией гомоморфизмов в диаграмме (10). Определена последовательность характеристических классов

$$\bar{\zeta}_{[2],L} \in H^2(\bar{L}^{n-k2^d}_{[2]};\mathbb{Z}/2), \dots, \bar{\zeta}_{[d],L} \in H^{2^{d-1}}(\bar{L}^{n-k2^d}_{[d]};\mathbb{Z}/2),$$

$$\zeta_{[d+1],L} \in H^{2^d}(L^{n-k2^d};\mathbb{Z}/2). \quad (13)$$

Каждый элемент в этой последовательности индуцирован из характеристического класса соответствующего универсального пространства в (10). Башня накрытий (11) и последовательность характеристических классов (13) определена не только для $\mathbb{Z}/2^{[d+1]}$–оснащенного многообразия, которое является многообразием самопересечения некоторого $\mathbb{Z}/2^{[d]}$–оснащенного погружения, но и для произвольного $\mathbb{Z}/2^{[d+1]}$–оснащенного многообразия.

Определение 2. Инвариант Кервера $\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[d+1]}}$ произвольного $\mathbb{Z}/2^{[d+1]}$–оснащенного погружения (h, Λ, ζ_L) определим следующей формулой:

$$\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[d+1]}}(h, \Lambda, \zeta_L) = \langle \bar{\zeta}^{\frac{n-k2^d}{2}}_{[2],L}; [\bar{N}_{[2]}] \rangle, \tag{14}$$

где через $[\bar{N}_{[2]}]$ обозначен фундаментальный класс накрывающего многообразия в последовательности (13).

Построенный инвариант определяет гомоморфизм $\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[d]}}$: $Imm^{\mathbb{Z}/2^{[d]}}(n, n - k2^{d-1}) \to \mathbb{Z}/2$, который включен в следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} Imm^{\mathbb{Z}/2^{[d]}}(n - k2^{d-1}, k2^{d-1}) & \stackrel{\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[d]}}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2 \\ \downarrow \delta^k_{\mathbb{Z}/2^{[d+1]}} & & \| \\ Imm^{\mathbb{Z}/2^{[d+1]}}(n - k2^d, k2^d) & \stackrel{\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[d+1]}}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2. \end{array} \tag{15}$$

В разделе 2 определено понятие $\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d$–структуры (абелева структура) скошенно-оснащенного погружения, представляющего элемент из группы $Imm^{sf}(n - k, k)$. Доказана Теорема 6 о том, что при соответствующих размерностных ограничениях и по модулю элементов нечетного порядка произвольный класс кобордизма скошенно-оснащенного погружения допускает $\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d$–структуру. Условие этой теоремы предполагает существование ретракции характеристического класса скошенно-оснащенного многообразия, см. Определение 5. Теорема о ретракции доказана в разделе 8.

В разделе 3 сформулировано понятие $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–структуры (бициклическая структура) $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенного погружения. В Следствии 13 Теоремы 12 доказывается, что в условиях Теоремы 6 (здесь и далее натруральное число n_s, определенное в условиях этой теоремы можно принять равным 126, если выполнено дополнительное условие о денадстройке) произвольный элемент из группы

$$Im(\delta^{\frac{n-n_s}{32}}_{\mathbb{Z}/2^{[3]}} : Imm^{sf}(n - \frac{n - n_s}{32}, \frac{n - n_s}{32}) \to$$

$$Imm^{\mathbf{D}_4}(n - \frac{n-n_s}{8}, \frac{n-n_s}{8})) \qquad (16)$$

представлен $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенным погружением с бициклической структурой. Для такого погружения инвариант Кервера выражается через $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–характеристический класс многообразия самопересечения.

В разделе 4 сформулировано понятие $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$–структуры (бикватернионная структура) для $\mathbb{Z}/2^{[5]}$–оснащенного погружения. В Следствии 19 Теоремы 18 доказывается, что в условиях Теоремы 7 произвольный элемент из группы

$$Im(\delta^{\frac{n-n_s}{32}}_{\mathbb{Z}/2^{[6]}} : Imm^{sf}(n - \frac{n-n_s}{32}, \frac{n-n_s}{32}) \to$$

$$Imm^{\mathbb{Z}/2^{[6]}}(n - \frac{n-n_s}{2}, \frac{n-n_s}{2})) \qquad (17)$$

представлен $\mathbb{Z}/2^{[6]}$–оснащенным погружением с бикватернионной структурой. Для такого погружения инвариант Кервера выражается через $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$–характеристический класс многообразия самопересечения.

Следующие две диаграммы поясняют план доказательства. На следующей диаграмме определены соответствующие подгруппы в структурных группах кобордизма погружений и указано название структуры погружения, соответствующей каждой подгруппе:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{I}_d \oplus \dot{\mathbf{I}}_d & \subset & \mathbb{Z}/2^{[2]} & & \frac{Abelian}{structure} \\
\downarrow & & i_{[3]} \downarrow & & \\
\mathbf{I}_a \oplus \dot{\mathbf{I}}_d & \subset & \mathbb{Z}/2^{[3]} & & \frac{cyclic-Abelian}{structure} \\
\downarrow & & i_{[4]} \downarrow & & \\
\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a & \subset & \mathbb{Z}/2^{[4]} & & \frac{bicyclic}{structure} \\
\downarrow & & i_{[5]} \downarrow & & \\
\mathbf{Q} \times \dot{\mathbf{I}}_a & \subset & \mathbb{Z}/2^{[5]} & & \frac{quaternionic-cyclic}{structure} \\
\downarrow & & i_{[6]} \downarrow & & \\
\mathbf{Q} \times \dot{\mathbf{Q}} & \subset & \mathbb{Z}/2^{[6]} & & \frac{biquaternionic}{structure}.
\end{array}$$

На следующей диаграмме показаны естественные гомоморфизмы групп кобордизмов погружений и указаны инварианты Кервера на каждой из этих групп:

$$\begin{array}{ccccc}
Imm^{\mathbb{Z}/2^{[2]}}(n-2,2) & \stackrel{J^k_{\mathbb{Z}/2^{[2]}}}{\longrightarrow} & Imm^{\mathbb{Z}/2^{[2]}}(n-2k,2k) & \stackrel{\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[2]}}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2 \\
\downarrow \delta_{\mathbb{Z}/2^{[3]}} & & \downarrow \delta^k_{\mathbb{Z}/2^{[3]}} & & \| \\
Imm^{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(n-4,4) & \stackrel{J^k_{\mathbb{Z}/2^{[3]}}}{\longrightarrow} & Imm^{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(n-4k,4k) & \stackrel{\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[3]}}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2 \\
\downarrow \delta_{\mathbb{Z}/2^{[4]}} & & \downarrow \delta^k_{\mathbb{Z}/2^{[4]}} & & \| \\
Imm^{\mathbb{Z}/2^{[4]}}(n-8,8) & \stackrel{J^k_{\mathbb{Z}/2^{[4]}}}{\longrightarrow} & Imm^{\mathbb{Z}/2^{[4]}}(n-8k,8k) & \stackrel{\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[4]}}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2 \\
\downarrow \delta_{\mathbb{Z}/2^{[5]}} & & \downarrow \delta^k_{\mathbb{Z}/2^{[5]}} & & \| \\
Imm^{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(n-16,16) & \stackrel{J^k_{\mathbb{Z}/2^{[5]}}}{\longrightarrow} & Imm^{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(n-16k,16k) & \stackrel{\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[5]}}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2 \\
\downarrow \delta_{\mathbb{Z}/2^{[6]}} & & \downarrow \delta^k_{\mathbb{Z}/2^{[6]}} & & \| \\
Imm^{\mathbb{Z}/2^{[6]}}(n-32,32) & \stackrel{J^k_{\mathbb{Z}/2^{[6]}}}{\longrightarrow} & Imm^{\mathbb{Z}/2^{[6]}}(n-32k,32k) & \stackrel{\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[6]}}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2.
\end{array}$$

Воспользовавшись коммутативностью этой диаграммы, достаточно доказать, что инвариант Кервера, определенный в последней строке диаграммы, равен нулю. Это доказывается при помощи понятия бикватернионной структуры.

Автор благодарит Проф. M.Mahowald'a (2005) и Проф. R.Cohen'a (2007), проф. P.Landweber'a за обсуждения, Проф. А.А.Воронова за приглашение с докладом в Университет Миннесоты (2005). Проф. В. Чернова за приглашение с докладом в Дартмуский Колледж (2009).

Работа была начата на семинаре М.М.Постникова в 1998 году. Работа посвящается памяти Проф. Ю.П.Соловьева. Теорема о ретракции доказана на семинаре А.С.Мищенко.

2 Геометрический контроль многообразия самопересечения скошенно-оснащенных погружений

В этом и в последующих разделах будут использоваться группы кобордизмов $Imm^{sf}(n-k,k)$, $Imm^{\mathbb{Z}/2^{[2]}}(n-2k,2k)$. Хорошо известно, что если первый аргумент в скобках, обозначающий размерность погруженного многообразия, строго положителен, то указанная группа является конечной 2–группой.

Диэдральная группа $\mathbb{Z}/2^{[2]}$ определяется своим копредставлением $\{a,b|a^4 = b^2 = e, [a,b] = a^2\}$. Эта группа является подгруппой в группе движений плоскости $O(2)$, т.е. группой преобразований стандартной плоскости, сохраняющей пару направляющих прямых, порожденных базисными векторами $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$. Элемент a представлен вращением плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$. Элемент b соответствует отражению плоскости относительно прямой с образующим вектором $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$.

Рассмотрим подгруппу $\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d \subset \mathbb{Z}/2^{[2]}$ диэдральной группы, порожденную элементами $\{a^2, b\}$. Заметим, что это элементарная 2–группа ранга 2. Это – группа движений, сохраняющих по отдельности каждую из прямых l_1, l_2 с направляющими векторами $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$ соответственно. Группа когомологий $H^1(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z}/2)$ также является элементарной 2–группой с двумя образующими. Опишем эти образующие.

Обозначим через $p_d : \mathbf{I}_d \times \mathbf{I}_{\dot{d}} \to \mathbf{I}_d$ – гомоморфизм, ядро которого является преобразованием симметрии относительно биссектрисы первого координатного угла. Определим $\kappa_d = p_d^*(t_d)$, где $e \neq t_d \in \mathbf{I}_d \simeq \mathbb{Z}/2$. Обозначим через $p_{\dot{d}} : \mathbf{I}_d \times \mathbf{I}_{\dot{d}} \to \dot{\mathbf{I}}_d$ – гомоморфизм, ядро которого является преобразованием симметрии относительно биссектриссы второго координатного угла, или, эквивалентно, ядро которого является композицией преобразования центральной симметрии и преобразования симметрии относительно второго координатного угла. Определим $\kappa_{\dot{d}} = p_{\dot{d}}^*(t_{\dot{d}})$, где $e \neq t_{\dot{d}} \in \mathbf{I}_{\dot{d}} \simeq \mathbb{Z}/2$.

Когомологический класс $\kappa_d \kappa_{\dot{d}}$ является элементом из группы $H^2(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z}/2))$, который обозначается через $\tau_{d \times \dot{d}}$.

Рассмотрим отображение $i_{d \times \dot{d}} : K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1) \to K(\mathbb{Z}/2^{[2]}, 1)$ и рассмотрим обратный образ $i_b^*(\tau_{[2]})$ эйлерового класса $\tau_{[2]} \in H^2(K(\mathbb{Z}/2^{[2]}, 1); \mathbb{Z}/2)$ универсального 2-расслоения $\zeta_{[2]}$ – над пространством Эйленберга-Маклейна $K(\mathbb{Z}/2^{[2]}, 1)$. Нетрудно проверить равенство

$$\kappa_d \kappa_{\dot{d}} = \tau_{d \times \dot{d}}. \tag{18}$$

Рассмотрим эйлеров класс $e(\zeta_{[2]}) \in H^2(K(\mathbb{Z}/2^{[2]}, 1); \mathbb{Z}/2)$, который ниже для краткости будем обозначать также, как и соответствующее расслоение через $\zeta_{[2]}$, и индуцируем этот класс в группу $H^2(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z}/2)$ при помощи гомоморфизма $i_{d \times \dot{d}}$. Индуцированный когомологический класс совпадает с эйлеровом классом $\tau_{d \times \dot{d}} = e(\kappa_d \oplus \kappa_{\dot{d}})$ расслоения $\kappa_d \oplus \kappa_{\dot{d}}$, в силу естественности эйлерового класса и, поскольку $i_{d \times \dot{d}}^*(\zeta_{[2]}) = \kappa_d \oplus \kappa_{\dot{d}}$. В этой формуле через κ_d, $\kappa_{\dot{d}}$ снова обозначены линейные расслоения над $K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$, соответствующие классам одномерных когомологий.

Поскольку $i_{d \times \dot{d}}(\zeta_{[2]})$ является суммой Уитни пары соответветствующих линейных расслоений, получим равенство (18) для эйлеровых классов.

Определение 3. Пусть скошенно-оснащенное погружение (f,Ξ,κ_M), $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ представляет элемент $x \in Imm^{sf}(n-k,k)$. Пусть $\mathbb{Z}/2^{[2]}$–оснащенное погружение (g,Ψ,η_N), $g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ представляет элемент $y = \delta^k_{\mathbb{Z}/2^{[2]}}(x) \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[2]}}(n-2k,2k)$. Скажем, что скошенно-оснащенное погружение (f,Ξ,κ_M) является $\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d$–погружением (абелевым погружением), если структурное отображение $\eta_N : N^{n-2k} \to K(\mathbb{Z}/2^{[2]},1)$ представлено в виде композиции $\eta_{d\times\dot{d},N} : N^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d,1)$ и отображения $i_{d\times\dot{d}} : K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d,1) \to K(\mathbb{Z}/2^{[2]},1)$.

Определение 4. Пусть скошенно-оснащенное погружение (f,Ξ,κ), $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ представляет элемент $x \in Imm^{sf}(n-k,k)$, причем $n > 32k$. Пусть $\mathbb{Z}/2^{[2]}$–оснащенное погружение (g,Ψ,η_N), $g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ является погружением многообразия самопересечения погружения f и представляет элемент $y = \delta^k_{\mathbb{Z}/2^{[2]}}(x) \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[2]}}(n-2k,2k)$. Скажем, что скошенно-оснащенное погружение (f,Ξ,κ_M) допускает абелеву структуру ($\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d$–структуру), если существует отображение $\eta_{d\times\dot{d}} : N^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d,1)$, удовлетворяющее следующему уравнению:

$$\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[2]}}(y) = \langle \eta_N^{15k} \eta_{d\times\dot{d},N}^{\frac{n-32k}{2}}; [N] \rangle. \qquad (19)$$

В этом уравнении характеристический класс $\eta^*_{d\times\dot{d},N}(\tau_{d\times\dot{d}}) \in H^2(N^{n-2k};\mathbb{Z}/2)$ обозначен через $\eta_{d\times\dot{d},N}$, $[N]$– фундаментальный класс многообразия N^{n-2k}, $\eta_N \in H^2(N^{n-2k};\mathbb{Z}/2)$ – характеристический класс $\mathbb{Z}/2^{[2]}$–оснащения Ψ многообразия N^{n-2k}, характеристическое число Θ^k_{sf} определено по формуле (5).

Пример

Пусть скошенно-оснащенное погружение (f,Ξ,κ_M), $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ представляет элемент $x \in Imm^{sf}(n-k,k)$, $n > 32k$ и является $\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d$–погружением. Тогда скошенно-оснащенное погружение (f,Ξ,κ_M) допускает абелеву структуру.

Определение 5. Пусть $(f,\Xi,\kappa_M) \in Imm^{sf}(n-k,k)$, $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, $\kappa_M \in H^1(M^{n-k};\mathbb{Z}/2)$ скошенного оснащения Ξ. Скажем, что пара (M^{n-k},κ_M) допускает денадстройку порядка q, если отображение $\kappa_M : M^{n-k} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ представлено следующей композицией $\kappa = I \circ \kappa'_M : M^{n-k} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-q-1} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$. Скажем, что элемент $[(f,\Xi,\kappa_M)]$ допускает денадстройку порядка q, если в этом классе кобордизма существует тройка $(M'^{n-k},\Xi',\kappa'_M)$, допускающая денадстройку порядка q.

Теорема 6. *Пусть n_s, $n > n_s$, натуральное число вида $2^s - 2$, $s \ge 6$. Предположим, что элемент $\alpha \in Imm^{sf}(n - \frac{n-n_s}{32}, \frac{n-n_s}{32})$ допускает денадстройку порядка $q = \frac{n_s}{2} + 1$. Тогда элемент α допускает $\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d$–структуру.*

Докажем следующую лемму.

Лемма 7. *Для произвольного натурального k', $k' \equiv 1 \pmod 2$, $k' \ge 7$, существует PL-отображение $d : \mathbb{RP}^{n-k'} \to \mathbb{R}^n$ общего положения, для которого многообразие $N(d)$ с особенностями с краем точек самопересечения отображения d допускает отображение $\kappa_{N(d)} : N(d) \to K(\mathbf{I}_d, 1)$, ограничение которого на край $\partial N(d)$ (край этого многообразия с особенностями состоит из критических точек отображения d) совпадает с композицией $\partial N(d) \to \mathbb{RP}^{n-k'} \subset \mathbb{RP}^\infty = K(\mathbf{I}_d, 1)$.*

Конструкция отображения $d : \mathbb{RP}^{n-k'} \to \mathbb{R}^n$

Обозначим через J_0 стандартную $(n-k')$–мерную сферу коразмерности k', которая представлена как джойн $\frac{n-k'+1}{2} = r$ копий окружности S^1. Обозначим стандартное вложение J_0 в $\mathbb{R}^n$ через $i_{J_0} : J_0 \subset \mathbb{R}^n$.

Определено отображение $p' : S^{n-k'} \to J_0$, которое получается в результате взятия джойна r копий стандартных 2-листных накрытий $S^1 \to \mathbb{RP}^1$. Стандартное антиподальное действие $\mathbb{Z}/2 \times S^{n-k'} \to S^{n-k'}$, коммутирует с отображением p'. Тем самым, определено отображение $p : \mathbb{RP}^{n-k'} \to J_0$.

Рассмотрим композицию $i_{J_0} \circ p : \mathbb{RP}^{n-k'} \to J_0 \subset \mathbb{R}^n$. Отображение d определено в результате малой δ-деформации общего положения этого отображения. Деформация $i_{J_0} \circ p \mapsto d$ и ее калибр выбираются в процессе доказательства.

Доказательство Леммы 7

Доказательство аналогично (существенно проще) доказательству Предложению 22 из [A].

Доказательство Теоремы 6

Определим $k = \frac{n-n_s}{32}$. Пусть элемент α представлен скошено-оснащенным погружением (f, Ξ, κ_M), $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$. По предположению существует отображение $\kappa'_M : M^{n-k} \to \mathbb{RP}^{n-k-q-1}$, такое, что композиция $M^{n-k} \to$

$\mathbb{RP}^{n-k-q-1} \subset K(\mathbf{I}_d, 1)$ совпадает с отображением $\kappa : M^{n-k} \to K(\mathbf{I}_d, 1)$, $q = \frac{n_s}{2} + 1$. Заметим, что $k+q+1$ нечетно, обозначим это число через k' и рассмотрим отображение $d : \mathbb{RP}^{n-k'} \to \mathbb{R}^n$, построенное в Лемме (7).

Выберем положительное число ε меньшим радиуса регулярной (погруженной) окрестности U_{reg} регулярных точек отображения d и меньшим радиуса регулярной окрестности $U_{\partial N(d)}$ (погруженной) критических точек этого отображения. Рассмотрим погружение $f_1 : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ в классе регулярной гомотопии погружения f такое, что выполнено неравенство

$$\mathrm{dist}(d \circ \kappa'; f_1)_{C^0} < \varepsilon.$$

Погружение f_1 является скошенно-оснащенным посредством Ξ_1 с тем же характеристическим классом скошенного оснащения κ_M, при этом $[(f_1, \Xi_1, \kappa_M)] = \alpha$, см. [A], Следствие 23.

Докажем, что скошенно-оснащенное погружение f_1 допускает $\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d$–структуру. Обозначим через N_1^{n-2k} многообразие самопересечения погружения f_1. Определим отображение $\eta_{d \times \dot{d}} : N_1^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$. Рассмотрим представление многообразия N_1^{n-2k} в виде объединения двух многообразий по общей части границы: $N_1^{n-2k} = N_{N(d)}^{n-2k} \cup_\partial N_{reg}^{n-2k}$. В этой формуле $N_{N(d)}^{n-2k}$ – многообразие с краем, погруженно в регулярную (погруженную) окрестность $U_{N(d)}$ многообразия с особенностями с краем $N(d)$ точек самопересечения отображения d. Многообразие N_{reg}^{n-2k} с краем, погруженно в погруженную окрестность U_{reg}. Общий край многообразий $N_{N(d)}^{n-2k}$ N_{reg}^{n-2k} является замкнутым многообразие размерности $n-2k-1$, это многообразие погружено в границу погруженной окрестности $U_{\partial N(d)}$.

Определим на многообразии N_1^{n-2k} когомологический класс $\kappa_{d,N_1} \in H^1(N_1^{n-2k}; \mathbb{Z}/2)$ отображением $N_1^{n-2k} \stackrel{\kappa_{d,N_1}}{\longrightarrow} K(\mathbf{I}_d, 1)$. На подмногообразии N_{reg}^{n-2k} определим отображение $\kappa_{d,N_{reg}} : N_{reg}^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_d, 1)$ как композицию проекции $N_{reg}^{n-2k} \to \mathbb{RP}^{n-k'}$ и включения $\mathbb{RP}^{n-k'} \subset \mathbb{RP}^\infty = K(\mathbf{I}_d, 1)$. На подмногообразии $N_{N(d)}^{n-2k}$ определим отображение $\kappa_{N(d)} : N_{N(d)}^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_d, 1)$ как композицию проекции $N_{N(d)}^{n-2k} \to N(d)$ и отображения $\kappa_d : N(d) \to K(\mathbf{I}_d, 1)$, построенного в Лемме 7. Ограничения отображений $\kappa_{N(d)}$, $\kappa_{d,N_{reg}}$ на края $\partial N_{N(d)}^{n-2k}$ и ∂N_{reg}^{n-2k} гомотопны, поскольку отображение $\kappa_{N(d)} : N(d) \to K(\mathbf{I}_d, 1)$ удовлетворяет на $\partial N(d)$ граничному условию. Следовательно, определено отображение $\kappa_{d,N_1} : N_1^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_d, 1)$ как результат склейки отображений $\kappa_{N(d)}$ и $\kappa_{d,N_{reg}}$.

Когомологический класс $\kappa_{\dot{d},N_1} \in H^1(N_1^{n-2k}; \mathbb{Z}/2)$ определим как сумму характеристического класса канонического двулистного накрытия $\bar{N}_1^{n-2k} \to N_1^{n-2k}$ с классом κ_{d,N_1}. Пара когомологических классов $\kappa_{\dot{d},N_1}$, κ_{d,N_1} определяют искомое отображение $\eta_{d\times \dot{d},N_1} : N_1^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$. Это отображение однозначно характеризуется тем, что $\eta^*_{d\times \dot{d},N_1}(\kappa_d) = \kappa_{d,N_1}$, $\eta^*_{d\times \dot{d},N_1}(\kappa_{\dot{d}}) = \kappa_{\dot{d},N_1}$.

Проверим уравнение (19). Рассмотрим отображение $\kappa'_M : M^{n-k} \to \mathbb{RP}^{n-k-q-1}$ и рассмотрим отображение $\kappa_{M_2} : M_2^{n-k} \to \mathbb{RP}^{n-k-q-1}$, которое определено как ограничение κ'_M на полный прообраз $M_2^{n-16k} = \kappa'^{-1}(\mathbb{RP}^{n-16k-q-1})$ проективного подпространства $\mathbb{RP}^{n-16k-q-1} \subset \mathbb{RP}^{n-k-q-1}$ коразмерности $15k$, в предположении, что отображение κ'_M трансверсально вдоль этого подмногообразия.

Рассмотрим погружение $f_2 : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, которое определено как ограничение погружения f_1 на подмногообразие $i_M : M_2^{n-16k} \subset M^{n-k}$. Погружение является скошенно-оснащенным в коразмерности $16k$. Обозначим скошенное оснащение этого погружения через Ξ_2, а характеристический класс этого скошенного оснащения через $\kappa_{M_2} \in H^1(M_2^{n-16k};\mathbb{Z}/2)$. По построению $\kappa_{M_2} = i_M^*\kappa_M$. Тройка $(f_2, \Xi_2, \kappa_{M_2})$ определяет элемент $J_{sf}^{16k}(\alpha) \in Imm^{sf}(n-16k, 16k)$.

Рассмотрим многообразие точек самопересечения погружения f_2 и обозначим это многообразие через N_2^{n-32k}. Определено естественное вложение

$$i_{N_1} : N_2^{n-32k} \subset N_1^{n-2k}. \tag{20}$$

Фундаментальный класс рассматриваемого подмногообразия представляет цикл $i_{N_1,*}([N_2]) \in H_{n-32k}(N_1^{n-2k};\mathbb{Z}/2)$. Этот цикл двойственен в смысле Пуанкаре циклу $\eta_{N_1}^{15k} \in H^{30k}(N_1^{n-2k};\mathbb{Z}/2)$.

Докажем, что подмногообразие (20) целиком содержится в подмногообразии $N_{reg}^{n-2k} \subset N_1^{n-2k}$, т.е справедливо включение

$$Im(i_{N_1}(N_2^{n-32k})) \subset N_{reg}^{n-2k} \subset N_1^{n-2k}. \tag{21}$$

Рассмотрим структурное отображение $\eta_{N(d)} : (N(d), \partial N(d)) \to (K(\mathbb{Z}/2^{[2]},1), K(\mathbf{I}_d,1))$ и обозначим снова через $\eta_{N(d)} \in H^2(N(d);\mathbb{Z}/2)$ характеристический класс, который индуцирован из универсального класса $\eta_{[2]} \in H^2(K(\mathbb{Z}/2^{[2]},1);\mathbb{Z}/2)$ (из эйлерового класса универсального $\mathbb{Z}/2^{[2]}$-расслоения) отображением $\eta_{N(d)}$. Класс гомологий $(\eta_{N_1}^{15k})^{(op)} \in H_{n-32k}(N_1^{n-2k};\mathbb{Z}/2)$ представлен циклом, ограничение которого на подмногообразие с краем $N_{N(d)}^{n-2k} \subset N_1^{n-2k}$ совпадает с полным прообразом относительного цикла $((\eta_{N(d)})^{15k})^{(op)}$ при проекции $N_{N(d)}^{n-2k} \to N(d)$ на центральное подмногообразие с особенностями с краем в регулярной погруженной окрестности.

По соображениям размерности, поскольку размерность $dim(N(d)) = n-2k-2q-2 = n-\frac{n-n_s}{16}-n_s-2$ меньше коразмерности подмногообразия (20), которая равна $30k = \frac{15(n-n_s)}{16}$, относительный гомологический класс, двойственный коциклу $(\eta_{N(d)})^{15k}$, представлен в $N(d)$ пустым многообразием. Это доказывает формулу (21).

Теперь для доказательства (19) достаточно заметить, что в силу формулы (21), коцикл $\eta_{d\times\dot{d},N_1} \in H^2(N_1^{n-2k};\mathbb{Z}/2)$, ограниченный на подмногообразие (20), совпадает с ограничением коцикла $\eta_{N_1} \in H^2(N_1^{n-2k};\mathbb{Z}/2)$ на это же многообразие. Тем самым, формула (19) и Теорема 6 доказаны.

3 $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–структура (бициклическая структура) на $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенном погружении

Определим группу $\mathbf{I}_a$ как циклическую подгруппу порядка 4 в группе диэдра $\mathbf{I}_a \subset \mathbb{Z}/2^{[2]}$, см. [A], раздел 2. Определим подгруппу

$$i_{a\times\dot{a}} : \mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a \subset \mathbb{Z}/2^{[4]}. \tag{22}$$

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^8$ определен ортонормальный базис $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_8)$, при помощи которого определялась группа $\mathbb{Z}/2^{[4]}$.

Обозначим образующие компонент сомножителей группы $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$ через a, $\dot{a}$ соответственно. Опишем преобразования из $\mathbb{Z}_2^{[4]}$, которые соответствуют каждой образующей. Рассмотрим новый базис $\{\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_8\}$, определенный формулами $\mathbf{f}_{2i-1} = \mathbf{e}_{2i-1}+\mathbf{e}_{2i}$, $\mathbf{f}_{2i} = \mathbf{e}_{2i-1}-\mathbf{e}_{2i}$, $i = 1,\dots,4$. Образующая a порядка 4 представлена поворотом в каждой плоскости $(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_3)$, $(\mathbf{f}_5,\mathbf{f}_7)$ на угол $\frac{\pi}{2}$ и одновременной центральной симметрией в плоскости $(\mathbf{f}_2-\mathbf{f}_4,\mathbf{f}_6-\mathbf{f}_8)$. Образующая $\dot{a}$ представлена поворотом в плоскостях $(\mathbf{f}_2-\mathbf{f}_4,\mathbf{f}_6-\mathbf{f}_8)$, $(\mathbf{f}_2+\mathbf{f}_4,\mathbf{f}_6+\mathbf{f}_8)$ на угол $\frac{\pi}{2}$ и одновременной центральной симметрией в плоскости $(\mathbf{f}_1-\mathbf{f}_5,\mathbf{f}_3-\mathbf{f}_7)$.

Покажем, что группа преобразований $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$ имеет инвариантные $(2,2,2,2)$-мерные подпространства, которые мы обозначим через $\mathbb{R}^2_{a,+}$, $\mathbb{R}^2_{a,-}$, $\mathbb{R}^2_{\dot{a},+}$, $\mathbb{R}^2_{\dot{a},-}$.

Подпространство $\mathbb{R}^2_{a,+}$ порождено парой векторов $(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_5,\mathbf{f}_3+\mathbf{f}_7)$. Подпространство $\mathbb{R}^2_{a,-}$ порождено парой векторов $(\mathbf{f}_1-\mathbf{f}_5,\mathbf{f}_3-\mathbf{f}_7)$. Подпространство $\mathbb{R}^2_{\dot{a},+}$ порождено парой векторов $(\mathbf{f}_2+\mathbf{f}_4,\mathbf{f}_6+\mathbf{f}_8)$. Подпространство $\mathbb{R}^2_{\dot{a},-}$ порождено парой векторов $(\mathbf{f}_2-\mathbf{f}_4,\mathbf{f}_6-\mathbf{f}_8)$

Образующая a действует поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$ в каждой плоскости $\mathbb{R}^2_{a,+}$, $\mathbb{R}^2_{a,-}$ и симметрией в плоскости $\mathbb{R}^2_{\dot{a},-}$, которая, очевидно, коммутирует с действием образующей $\dot{a}$ в этой плоскости. Образующая $\dot{a}$ действует поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$ в каждой плоскости $\mathbb{R}^2_{\dot{a},+}$ $\mathbb{R}^2_{\dot{a},-}$ и одновременно центральной симметрией в плоскости $\mathbb{R}^2_{a,-}$, которая, очевидно, коммутирует с действием образующей a в этом плоскости. Подгруппа (22) определена.

Удобно перейти к новому базису

$$(\mathbf{h}_{1,+}, \mathbf{h}_{2,+}, \mathbf{h}_{1,-}, \mathbf{h}_{2,-}, \dot{\mathbf{h}}_{1,+}, \dot{\mathbf{h}}_{2,+}, \dot{\mathbf{h}}_{1,-}, \dot{\mathbf{h}}_{2,-}).$$

Пары векторов $(\mathbf{h}_{1,+}, \mathbf{h}_{2,+})$, $(\mathbf{h}_{1,-}, \mathbf{h}_{2,-})$ задают базисы в подпространствах $\mathbb{R}^2_{a,+}$, $\mathbb{R}^2_{a,-}$ соответственно. Далее пары векторов $(\dot{\mathbf{h}}_{1,+}, \dot{\mathbf{h}}_{2,+})$, $(\dot{\mathbf{h}}_{1,-}, \dot{\mathbf{h}}_{2,-})$ задают базисы в подпространствах $\mathbb{R}^2_{\dot{a},+}$, $\mathbb{R}^2_{\dot{a},-}$ соответственно.

Рассмотрим подгруппу $i_{a\times\dot{d},a\times\dot{a}} : \mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d \subset \mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$, которая определена прямой суммой группы $\mathbf{I}_a$ с элементарной подгруппой $\dot{\mathbf{I}}_d$ второго слагаемого. Определено вложение $i_{a\times\dot{d}} : \mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d \subset \mathbb{Z}/2^{[3]}$, согласованное с вложением (22). При этом определена коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d & \stackrel{i_{d\times\dot{d}}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2^{[2]} \\
i_{d\times\dot{d},a\times\dot{d}} \downarrow & & i_{[3]} \downarrow \\
\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d & \stackrel{i_{a\times\dot{d}}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2^{[3]} \\
i_{a\times\dot{d},a\times\dot{a}} \downarrow & & i_{[4]} \downarrow \\
\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a & \stackrel{i_{a\times\dot{a}}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2^{[4]}.
\end{array} \qquad (23)$$

Определим также включение $i_{d\times\dot{d},a\times\dot{d}} = i_{d\times\dot{d},a} \times p_{d\times\dot{d},\dot{d}} : \mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d \subset \mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d$. Гомоморфизм $i_{a,b} : \mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d \to \dot{\mathbf{I}}_a$ определен как композиция гомоморфизма проекции $\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d \to \dot{\mathbf{I}}_d$ и гомоморфизма включения $\dot{\mathbf{I}}_d \subset \dot{\mathbf{I}}_a$. При этом определена коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d & \stackrel{i_{d\times\dot{d},a\times\dot{d}}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2^{[2]} & \stackrel{i_{diag,\mathbb{Z}/2^{[2]}}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2^{[2]} \times \mathbb{Z}/2^{[2]} \\
i_{d\times\dot{d},a\times\dot{d}} bigcap & & & & bar i_{[3]} \bigcap \\
\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d & & \stackrel{i_{a\times\dot{d}}}{\longrightarrow} & & \mathbb{Z}/2^{[3]}.
\end{array} \qquad (24)$$

Определение 8. Пусть $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенное ($\mathbb{Z}/2^{[4]}$–оснащенное) погружение (h, Λ, ζ_L), $h : L^{n-4k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ ($h : L^{n-8k} \looparrowright \mathbb{R}^n$) представляет элемент $z \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(n-4k, 4k)$ ($z \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[4]}}(n-8k, 8k)$). Скажем, что это $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенное ($\mathbb{Z}/2^{[4]}$–оснащенное) погружение является $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d$–оснащенным ($\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–оснащенным) погружением, если структурное отображение $\zeta_L : L^{n-4k} \to K(\mathbb{Z}/2^{[3]},1)$ ($\zeta_L : L^{n-8k} \to K(\mathbb{Z}/2^{[4]},1)$) представлено в виде композиции отображения $\zeta_{a\times\dot{d},L} : L^{n-4k} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d,1)$ $(\zeta_{a\times\dot{a},L} : L^{n-8k} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a,1))$ и отображения $i_{a\times\dot{d}} : K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d,1) \to K(\mathbb{Z}/2^{[3]},1)$ $(i_{a\times\dot{a}} : K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a,1) \to K(\mathbb{Z}/2^{[4]},1))$.

Рассмотрим аналоги соотношения (18) для групп $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d$ и $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–оснащенных погружений соответственно.

Группа когомологий $H^4(K(\mathbf{I}_a \times \mathbf{I}_d,1);\mathbb{Z}/2)$ $(H^8(K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a,1);\mathbb{Z}/2)$ содержит элемент $\tau_{a\times\dot{d}}$, $(\tau_{a\times\dot{a}})$, который определяется нижеследующем уравнением (25) ((26)).

Рассмотрим отображение $i_{a\times\dot{d}} : K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d,1) \to K(\mathbb{Z}/2^{[3]},1)$ ($i_{a\times\dot{a}} : K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a,1) \to K(\mathbb{Z}/2^{[4]},1)$) и рассмотрим обратный образ $i^*_{a\times\dot{d}}(\tau_{[3]})$ $(i^*_{a\times\dot{a}}(\tau_{[4]}))$ характеристического эйлерового класса $\tau_{[3]} \in H^4(K(\mathbb{Z}/2^{[3]}),1);\mathbb{Z}/2)$ $(\tau_{[4]} \in H^8(K(\mathbb{Z}/2^{[4]}),1);\mathbb{Z}/2))$ универсального расслоения. Определим

$$i^*_{a\times\dot{d}}(\tau_{[3]}) = \tau_{a\times\dot{d}} \in H^4(K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d,1);\mathbb{Z}/2), \tag{25}$$

$$i^*_{a\times\dot{a}}(\tau_{[4]}) = \tau_{a\times\dot{a}} \in H^8(K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a,1);\mathbb{Z}/2). \tag{26}$$

В разделе 1, для $\mathbb{Z}/2^{[d+1]}$–оснащенного погружения (h,Λ,ζ_L), наряду с 2^d-мерным характеристическим классом $\zeta_L \in H^{2^d}(L^{n-k2^d};\mathbb{Z}/2)$, рассматривался также 2-мерный характеристический класс $\bar{\zeta}_{[2],L} \in H^2(\bar{L}_{[2]}^{n-k2^dk};\mathbb{Z}/2)$. Для отображения $\zeta_{a\times\dot{d}} : L^{n-4k} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d,1)$ $(\zeta_{a\times\dot{a}} : L^{n-8k} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a,1))$ аналогом характеристического класса $\bar{\zeta}_{[2],L}$ служит характеристический класс $\bar{\zeta}_{d\times\dot{d},L} \in H^2(\bar{L}^{n-4k}_{d\times\dot{d}};\mathbb{Z}/2)$, при $d=3$ $(\bar{\zeta}_{d\times\dot{d},L} \in H^2(\bar{L}^{n-8k}_{d\times\dot{d}};\mathbb{Z}/2)$, при $d=4$). Определим этот 2-мерный характеристический класс.

Характеристический класс $\bar{\zeta}_{d\times\dot{d},L}$ индуцирован из универсального класса $\tau_{d\times\dot{d}} \in H^2(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d,1);\mathbb{Z}/2)$ при отображении $\bar{\zeta}_{d\times\dot{d},L} : \bar{L}^{n-4k}_{d\times\dot{d}} \to K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d,1)$ $(\bar{\zeta}_{d\times\dot{d},L} : \bar{L}^{n-8k}_{d\times\dot{d}} \to K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d,1))$. Отображение $\bar{\zeta}_{d\times\dot{d},L}$ определено как 2-листное накрытие отображения ζ_N относительно подгруппы $i_{d\times\dot{d},a\times\dot{d}} : \mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d \subset \mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d$ (как 4-листное накрытие относительно подгруппы $i_{d\times\dot{d},a\times\dot{a}} : \mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d \subset \mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$). Это 2-листное (4-листное) накрытие над многообразием L^{n-4k} (L^{n-8k}) относительно подгруппы $i_{d\times\dot{d},a\times\dot{d}}$ $(i_{d\times\dot{d},a\times\dot{a}})$ обозначается через $\pi_{d\times\dot{d},a\times\dot{d}} : \bar{L}^{n-4k}_{d\times\dot{d}} \to L^{n-4k}$ $(\pi_{d\times\dot{d},a\times\dot{a}} : \bar{L}^{n-8k}_{d\times\dot{d}} \to L^{n-8k})$.

Определение 9. Пусть $\mathbb{Z}/2^{[2]}$–оснащенное погружение (g,Ψ,η_N), $g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ представляет элемент $y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[2]}}(n-2k,2k)$, причем $n > 32k$. Пусть $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенное погружение (h, Λ, ζ_L), $h : L^{n-4k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ является погружением точек самопересечения погружения g и представляет элемент $z = \delta^{\mathbb{Z}/2^{[3]},k}(y) \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(n-4k, 4k)$. Скажем, что $\mathbb{Z}/2^{[2]}$–оснащенное погружение (g, Ψ, η_N) допускает $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d$–структуру, если существует отображение $\zeta_{a \times \dot{d}, L} : L^{n-4k} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$, удовлетворяющее уравнению:

$$\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[2]}}(y) = \langle \pi^*_{d \times \dot{d}, a \times \dot{d}, L}(\zeta_L^{7k}) \bar{\zeta}^{\frac{n-32k}{2}}_{d \times \dot{d}, L}; [\bar{L}_{d \times \dot{d}}] \rangle, \tag{27}$$

где $[\bar{L}_{d \times \dot{d}}]$– фундаментальный класс многообразия $\bar{L}^{n-4k}_{d \times \dot{d}}$, характеристическое число $\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[2]}}$ определено по формуле (6).

Определение 10. Пусть $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенное погружение (g, Ψ, η_N), $g : N^{n-4k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ представляет элемент $y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(n-4k, 4k)$, причем $n > 32k$. Пусть $\mathbb{Z}/2^{[4]}$–оснащенное погружение (h, Λ, ζ_L), $h : L^{n-8k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ является погружением точек самопересечения погружения g и представляет элемент $z = \delta^{\mathbb{Z}/2^{[4]},k}(y) \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[4]}}(n-8k, 8k)$. Скажем, что $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенное погружение (g, Ψ, η_N) допускает бициклическую структуру ($\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–структуру), если существует отображение $\zeta_{a \times \dot{a}, L} : L^{n-8k} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$, удовлетворяющее уравнению:

$$\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(y) = \langle \pi^*_{d \times \dot{d}, a \times \dot{a}, L}(\zeta_L)^{3k} \bar{\zeta}^{\frac{n-32k}{2}}_{d \times \dot{d}, L}; [\bar{L}_{d \times \dot{d}}] \rangle, \tag{28}$$

где $[\bar{L}_{d \times \dot{d}}]$– фундаментальный класс многообразия $\bar{L}^{n-8k}_{d \times \dot{d}}$, характеристическое число $\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[3]}}$ определено по формуле (14).

Пример

Пусть $\mathbb{Z}/2^{[2]}$-оснащенное ($\mathbb{Z}/2^{[3]}$-оснащенное) погружение (g, Ψ, η_N), $g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ ($g : N^{n-4k} \looparrowright \mathbb{R}^n$) представляет элемент $y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[2]}}(n-2k, 2k)$ ($y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(n-4k, 4k)$) и является $\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d$–оснащенным ($\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d$–оснащенным) погружением, причем $n > 32k$. Пусть $\mathbb{Z}/2^{[3]}$-оснащенное ($\mathbb{Z}/2^{[4]}$-оснащенное) погружение (h, Λ, ζ_L), $h : L^{n-4k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ ($h : L^{n-8k} \looparrowright \mathbb{R}^n$) представляет элемент $z = \delta^{\mathbb{Z}/2^{[3]},k} \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(n-4k, 4k)$ ($z = \delta^{\mathbb{Z}/2^{[4]},k} \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[4]}}(n-8k, 8k)$) и является $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d$–оснащенным ($\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–оснащенным) погружением. Тогда $\mathbb{Z}/2^{[2]}$–оснащенное ($\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенное) погружение (g, Ψ, η_N) допускает $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d$–структуру ($\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–структуру), заданную редукцией $\zeta_{a \times \dot{d}, L}$ ($\zeta_{a \times \dot{a}, L}$) структурного отображения ζ_L.

Обоснование примера

Остановимся на случае $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–оснащенного погружения. Рассмотрим когомологический класс $\zeta_{a\times\dot{a},L} = \zeta^*_{a\times\dot{a},L}(\tau_{a\times\dot{a}}) \in H^8(L^{n-8k};\mathbb{Z}/2)$. Заметим, что этот когомологический класс совпадает с классом $\zeta_L = \zeta^*_L(\tau_{[4]})$, поскольку оба класса определены как эйлеровы классы одного и того же расслоения. Теперь формула (28) очевидна.

Следующие теоремы аналогичны Теореме 7.

Теорема 11. *Предположим, что $\mathbb{Z}/2^{[2]}$–оснащенное погружение (g,Ψ,η_N), представляет элемент $y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[2]}}(n-\frac{n-n_s}{16},\frac{n-n_s}{16})$, $n_s = 2^s-2$, $n>n_s$, $s\geq 6$. Предположим, что задано отображение $\eta_{d\times\dot{d},N} : N^{n-\frac{n-n_s}{16}} \to K(\mathbf{I}_d\times\dot{\mathbf{I}}_d,1)$, при этом выполнено уравнение:*

$$\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[2]}}(y) = \langle(\eta_N^{\frac{15(n-n_s)}{32}})\eta_{d\times\dot{d},N}^{\frac{n_s}{2}};[N]\rangle, \tag{29}$$

где $[N]$ – фундаментальный класс многообразия $N^{n-\frac{n-n_s}{16}}$, $\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[2]}}$ – характеристическое число, определенное по формуле (6). Тогда элемент $J^{\mathbb{Z}/2^{[3]},\frac{n-n_s}{32}}(y)$ в группе $Imm^{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(n-\frac{n-n_s}{8},\frac{n-n_s}{8})$ представлен $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенным погружением (h,Λ,ζ_L), которое допускает $\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_d$-структуру.

Теорема 12. *Предположим, что $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенное погружение (g,Ψ,η_N), представляет элемент $y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(n-\frac{n-n_s}{8},\frac{n-n_s}{8})$, $n_s = 2^s-2$, $n>n_s$, $s\geq 6$. Предположим, что задано отображение $\eta_{a\times\dot{d},N} : N^{n-\frac{n-n_s}{8}} \to K(\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_d,1)$, при этом выполнено уравнение:*

$$\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(y) = \langle(\pi^*_{d\times\dot{d},a\times\dot{d},N}\eta_N)^{\frac{7(n-n_s)}{16}}\bar{\eta}_{d\times\dot{d},N}^{\frac{n_s}{2}};[\bar{N}_{d\times\dot{d}}]\rangle, \tag{30}$$

где накрывающее многообразие $\bar{N}_{d\times\dot{d}}^{n-\frac{n-n_s}{8}}$ и отображение $\bar{\eta}_{d\times\dot{d},N} : \bar{N}_{d\times\dot{d}}^{n-\frac{n-n_s}{8}} \to K(\mathbf{I}_d\times\dot{\mathbf{I}}_d,1)$ над отображением $\eta_{[3],N}$ определяются совершенно аналогичным понятиям в (27), через $[\bar{N}_{d\times\dot{d}}]$ обозначен фундаментальный класс многообразия $\bar{N}_{d\times\dot{d}}^{n-\frac{n-n_s}{8}}$.

Тогда элемент $J^{\mathbb{Z}/2^{[3]},\frac{n-n_s}{32}}(y)$ в группе $Imm^{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(n-\frac{n-n_s}{8},\frac{n-n_s}{8})$ представлен $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенным погружением (h,Λ,ζ_L), которое допускает $\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_d$-структуру.

Следствие 13. *Предположим, что выполнены условия Теоремы 6 (т.е. n_s является натуральным числом вида $2^s - 2$, $n > n_s$, $s \ge 6$ и элемент $x \in Imm^{sf}(n - \frac{n-n_s}{32}, \frac{n-n_s}{32})$ допускает ретракцию порядка $q = \frac{n_s}{2}$). Тогда элемент $\delta^k_{\mathbb{Z}^{[3]}} \circ \delta^k_{[2]}(x)$, определенный при помощи композиции гомоморфизмов (8), $k = \frac{n-n_s}{32}$, представлен $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенным погружением (h, Λ, ζ_L), которое допускает бициклическую структуру.*

4 $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$–структура (бикватернионная структура) $\mathbb{Z}/2^{[6]}$–оснащенного погружения

Вспомним определение кватернионной подгруппы $\mathbf{Q}_a \subset \mathbb{Z}/2^{[3]}$, которая содержит подгруппу $\mathbf{I}_a \subset \mathbf{Q}_a$, см. [A], раздел 2.

Определим подгруппу

$$i_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a} : \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a \subset \mathbb{Z}/2^{[6]}. \tag{31}$$

Рассмотрим базис $(\mathbf{h}_{1,+}, \mathbf{h}_{2,+}, \mathbf{h}_{1,+}, \mathbf{h}_{2,-}, \dot{\mathbf{h}}_{1,+}, \dot{\mathbf{h}}_{2,+}, \dot{\mathbf{h}}_{1,-}, \dot{\mathbf{h}}_{2,-})$ пространства $\mathbb{R}^8$, который был определен при построении бициклической структуры.

Опишем базис пространства $\mathbb{R}^{32}$. Этот базис состоит из 32 векторов, разбитых на два подмножества из 16 векторов

$$\mathbf{h}_{1,*,**}, \mathbf{h}_{2,*,**}, \mathbf{h}_{3,*,**}, \mathbf{h}_{4,*,**}, \tag{32}$$

$$\dot{\mathbf{h}}_{1,*,**}, \dot{\mathbf{h}}_{2,*,**}, \dot{\mathbf{h}}_{3,*,**}, \dot{\mathbf{h}}_{4,*,**}, \tag{33}$$

где символы $*, **$ независимо принимают значения $+, -$. В каждом из подпространств, порожденных 4 векторами (32), для которых символы $*, **$ принимают одинаковые значения, представление группы $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$ задано тривиально на втором слагаемом $\dot{\mathbf{Q}}_a$, при этом образующие **i**,**j**,**k** слагаемого $\mathbf{Q}_a$ действуют преобразованиями, определенными матрицами:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (35)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (36)$$

Образующая $\mathbf{i}$ ($\mathbf{j}$) первого слагаемого $\mathbf{Q}_a$ действует центральной симметрией в каждом 4-мерном подпространстве (33), порожденном векторами, для которых индекс $*$ ($**$) принимает значение $-$, а индекс $**$ ($*$) принимает любое фиксированное значение, в оставшейся паре пространств, порожденных векторами (33) действие тождественно.

В каждом из подпространств, порожденных 4 векторами (33) , для которых символы $*$, $**$ принимают одинаковые значения, представление группы $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$ задано тривиально на первом слагаемом $\mathbf{Q}_a$, причем образующие $\mathbf{i}$,$\mathbf{j}$,$\mathbf{k}$ слагаемого $\dot{\mathbf{Q}}_a$ представлены матрицами (34),(35),(36).

Образующая $\mathbf{i}$ ($\mathbf{j}$) второго слагаемого $\dot{\mathbf{Q}}_a$ действует центральной симметрией в каждом 4-мерном подпространстве (32), порожденном векторами, для которых индекс $*$ ($**$) принимает значение $-$, а индекс $**$ ($*$) принимает любое фиксированное значение, в оставшейся паре пространств, порожденных векторами (32) действие тождественно. Поскольку преобразование центральной симметрии лежит в центре группы $\mathbf{Q}_a$ ($\dot{\mathbf{Q}}_a$), преобразование любого элемента из $\dot{\mathbf{Q}}_a$ ($\mathbf{Q}_a$) в неприводимом подпространстве представления $\mathbf{Q}_a$ ($\dot{\mathbf{Q}}_a$) коммутирует с элементами указанного представления. Подгруппа (31) определена.

Рассмотрим подгруппу $i_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a} : \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a \subset \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$, которая определена прямой суммой группы $\mathbf{Q}_a$ с циклической подгруппой $\dot{\mathbf{I}}_a$ второго слагаемого. Определено вложение $i_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} : \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a \subset \mathbb{Z}/2^{[4]}$, индуцированное из вложения (31). При этом определена коммутативная диаграмма:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d & \stackrel{i_{d\times\dot d}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2^{[2]} \\
i_{d\times\dot d, a\times\dot d} \downarrow & & i_{[3]} \downarrow \\
\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d & \stackrel{i_{a\times\dot d}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2^{[3]} \\
i_{a\times\dot d, a\times\dot a} \downarrow & & i_{[4]} \downarrow \\
\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a & \stackrel{i_{a\times\dot a}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2^{[4]} \\
i_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a, \mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \downarrow & & i_{[5]} \downarrow \\
\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a & \stackrel{i_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2^{[5]} \\
i_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a, \mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a} \downarrow & & i_{[6]} \downarrow \\
\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a & \stackrel{i_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2^{[6]},
\end{array}
\qquad (37)
$$

которая включает в себя диаграмму (23) в качестве поддиаграммы.

Следующее определение аналогично Определению 8.

Определение 14. Пусть $\mathbb{Z}/2^{[5]}$–оснащенное ($\mathbb{Z}/2^{[6]}$–оснащенное) погружение (h, Λ, ζ_L), $h : L^{n-16k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ ($h : L^{n-32k} \looparrowright \mathbb{R}^n$) представляет элемент $z \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(n-16k, 16k)$ ($z \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[6]}}(n-32k, 32k)$). Скажем, что это $\mathbb{Z}/2^{[5]}$–оснащенное ($\mathbb{Z}/2^{[6]}$–оснащенное) погружение является $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–оснащенным ($\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$–оснащенным) погружением, если структурное отображение $\zeta_L : L^{n-16k} \to K(\mathbb{Z}/2^{[5]}, 1)$ ($\zeta_L : L^{n-32k} \to K(\mathbb{Z}/2^{[6]}, 1)$) представлено в виде композиции $\zeta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a, L} : L^{n-16k} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$ ($\zeta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a, L} : L^{n-32k} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, 1)$) и отображения $i_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} : K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1) \to K(\mathbb{Z}/2^{[5]}, 1)$ ($i_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a} : K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, 1) \to K(\mathbb{Z}/2^{[6]}, 1)$).

Рассмотрим аналоги соотношений (18), (25), (26) для групп $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$ и $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$–оснащенных погружений соответственно.

Группа когомологий $H^{16}(K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1); \mathbb{Z}/2)$ ($H^{32}(K(\mathbf{Q}_a \times \mathbf{Q}_a, 1); \mathbb{Z}/2)$) содержит элемент $\tau_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}$, ($\tau_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a}$, который определяется нижеследующим уравнением (38) ((39)).

Рассмотрим отображение $i_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} : K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1) \to K(\mathbb{Z}/2^{[5]}, 1)$ ($i_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a} : K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, 1) \to K(\mathbb{Z}/2^{[5]}, 1)$) и рассмотрим обратный образ $i^*_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}(\tau_{[5]})$ ($i^*_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a}(\tau_{[6]})$) характеристического эйлерового класса $\tau_{[5]} \in H^{16}(K(\mathbb{Z}/2^{[5]}), 1); \mathbb{Z}/2)$ ($\tau_{[6]} \in H^{32}(K(\mathbb{Z}/2^{[6]}), 1); \mathbb{Z}/2)$) универсального расслоения. Определим

$$
i^*_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}(\tau_{[5]}) = \tau_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \in H^{16}(K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1); \mathbb{Z}/2), \qquad (38)
$$

$$
i^*_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a}(\tau_{[6]}) = \tau_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a} \in H^{32}(K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, 1); \mathbb{Z}/2). \qquad (39)
$$

Для отображения $\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} : L^{n-16k} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$ $\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a} : L^{n-32k} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$ аналогом характеристического класса $\bar{\zeta}_{[2],L}$ служит характеристический класс $\bar{\zeta}_{d \times \dot{d},L} \in H^2(\bar{L}^{n-16k}_{d \times \dot{d}}; \mathbb{Z}/2)$, при $d = 5$ ($\bar{\zeta}_{d \times \dot{d},L} \in H^2(\bar{L}^{n-32k}_{d \times \dot{d}}; \mathbb{Z}/2)$, при $d = 6$). Определим этот 2-мерный характеристический класс.

Отображение $\bar{\zeta}_{d \times \dot{d},L}$ определено как 8-листное накрытие над отображением $\zeta_{[5],L}$ относительно подгруппы $i_{d \times \dot{d}, \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} : \mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d \subset \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$ (как 16-листное накрытие над отображением $\zeta_{[6],L}$ относительно подгруппы $i_{d \times \dot{d}, \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a} : \mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d \subset \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$). Над многообразием L^{n-16k} (L^{n-32k}) указанное накрытие обозначается через $\pi_{d \times \dot{d}, \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, L}$ ($\pi_{d \times \dot{d}, \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, L}$).

Определение 15. Пусть $\mathbb{Z}/2^{[4]}$–оснащенное погружение (g, Ψ, η_N), $g : N^{n-8k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ представляет элемент $y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[4]}}(n-8k, 8k)$, причем $n > 32k$. Пусть $\mathbb{Z}/2^{[5]}$–оснащенное погружение (h, Λ, ζ_L), $h : L^{n-16k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ является погружением точек самопересечения погружения g и представляет элемент $\delta^k_{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(y) \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(n-16k, 16k)$. Скажем, что $\mathbb{Z}/2^{[4]}$–оснащенное погружение (g, Ψ, η_N) допускает $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–структуру, если существует отображение $\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, L} : L^{n-16k} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$, удовлетворяющее уравнению:

$$\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[4]}}(y) = \langle \pi^*_{d \times \dot{d}, \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, L}(\zeta^k) \bar{\zeta}^{\frac{n-32k}{2}}_{d \times \dot{d}}; [\bar{L}_{d \times \dot{d}}] \rangle, \tag{40}$$

где $[\bar{L}_{d \times \dot{d}}]$– фундаментальный класс многообразия $\bar{L}^{n-16k}_{d \times \dot{d}}$, характеристическое число $\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[4]}}(y)$ определено по формуле (14) при $d = 4$.

Определение 16. Пусть $\mathbb{Z}/2^{[5]}$–оснащенное погружение (g, Ψ, η_N), $g : N^{n-16k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ представляет элемент $y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(n-16k, 16k)$, причем $n > 32k$. Пусть $\mathbb{Z}/2^{[6]}$–оснащенное погружение (h, Λ, ζ_L), $h : L^{n-32k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ является погружением точек самопересечения погружения g и представляет элемент $\delta^k_{\mathbb{Z}/2^{[6]}}(y) \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[6]}}(n-32k, 32k)$. Скажем, что $\mathbb{Z}/2^{[5]}$–оснащенное погружение (g, Ψ, η_N) допускает бикватернионную структуру ($\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$–структуру), если существует отображение $\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, L} : L^{n-32k} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, 1)$, удовлетворяющее уравнению:

$$\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(y) = \langle \bar{\zeta}^{\frac{n-32k}{2}}_{d \times \dot{d}}; [\bar{L}_{d \times \dot{d}}] \rangle, \tag{41}$$

где $[\bar{L}_{d\times\dot{d}}]$– фундаментальный класс многообразия $\bar{L}^{n-32k}_{d\times\dot{d}}$, характеристическое число $\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(y)$ определено по формуле (14) при $d=5$.

Пример

Пусть $\mathbb{Z}/2^{[4]}$-оснащенное ($\mathbb{Z}/2^{[5]}$-оснащенное) погружение (g,Ψ,η_N), $g : N^{n-8k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ ($g : N^{n-16k} \looparrowright \mathbb{R}^n$) представляет элемент $y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[4]}}(n-8k,8k)$ ($y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(n-16k,16k)$) и является $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–оснащенным ($\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$–оснащенным) погружением, причем $n > 32k$. Пусть $\mathbb{Z}/2^{[5]}$-оснащенное ($\mathbb{Z}/2^{[6]}$-оснащенное) погружение (h,Λ,ζ_L), $h : L^{n-16k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ ($h : L^{n-32k} \looparrowright \mathbb{R}^n$) представляет элемент $\delta^k_{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(y) \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(n-16k,16k)$ ($\delta^k_{\mathbb{Z}/2^{[6]}}(y) \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[6]}}(n-32k,32k)$) и является $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–оснащенным ($\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$–оснащенным) погружением. Тогда $\mathbb{Z}/2^{[4]}$–оснащенное ($\mathbb{Z}/2^{[5]}$–оснащенное) погружение (g,Ψ,η_N) допускает $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–структуру ($\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$–структуру), заданную редукцией $\zeta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,L}$ ($\zeta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,L}$) структурного отображения $\zeta_{[4],L}$ ($\zeta_{[5],L}$).

Обоснование примера

Остановимся на случае $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$–оснащенного погружения. Рассмотрим когомологический класс $\zeta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a,L} = \zeta^*_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a,L}(\tau_{Q_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a}) \in H^{32}(L^{n-32k};\mathbb{Z}/2)$. Заметим, что этот когомологический класс совпадает с классом $\zeta_L = \zeta^*_L(\tau_{[6]})$, поскольку оба класса определены как эйлеровы классы одного и того же расслоения. Теперь формула (41) очевидна.

Следующие теоремы аналогичны Теоремам 6,11,12.

Теорема 17. *Предположим, что $\mathbb{Z}/2^{[4]}$–оснащенное погружение (g,Ψ,η_N), представляет элемент $y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[4]}}(n-\frac{n-n_s}{4},\frac{n-n_s}{4})$, $n_s = 2^s-2$, $n > 5n_s+168$, $s \ge 6$. Предположим, что задано отображение $\eta_{a\times\dot{a},N} : N^{n-\frac{n-n_s}{4}} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a,1)$, при этом выполнено уравнение:*

$$\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[4]}}(y) = \langle \pi^*_{d\times\dot{d},a\times\dot{d},N}(\eta_{[4],N}^{\frac{3(n-n_s)}{32}})\bar{\eta}^{\frac{n_s}{2}}_{d\times\dot{d},N};[\bar{N}_{d\times\dot{d}}]\rangle, \qquad (42)$$

где накрывающее многообразие $\bar{N}^{n-\frac{n-n_s}{4}}_{d\times\dot{d}}$ и отображение $\bar{\eta}_{d\times\dot{d},N} : \bar{N}^{n-\frac{n-n_s}{4}}_{d\times\dot{d}} \to K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d,1)$ над отображением $\eta_{[4],N}$ определяются совершенно аналогичным понятиям в (40). Тогда элемент $J^{\frac{n-n_s}{32}}_{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(y)$

в группе $Imm^{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(n - \frac{n-n_s}{2}, \frac{n-n_s}{2})$ *представлен* $\mathbb{Z}/2^{[5]}$*–оснащенным погружением* (h, Λ, ζ_L)*, которое допускает* $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$*-структуру.*

Теорема 18. *Предположим, что* $\mathbb{Z}/2^{[5]}$*–оснащенное погружение* (g, Ψ, η_N)*, представляет элемент* $y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(n - \frac{n-n_s}{2}, \frac{n-n_s}{2})$*,* $n_s = 2^s - 2$*,* $n > \frac{5n_s+84}{3}$*,* $s \geq 6$*. Предположим, что задано отображение* $\eta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, N} : N^{n-\frac{n-n_s}{2}} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$*, при этом выполнено уравнение:*

$$\Theta^k_{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(y) = \langle \pi^*_{d \times \dot{d}, \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, N}(\eta_N^{\frac{n-n_s}{32}}) \bar{\eta}^{\frac{n_s}{2}}_{d \times \dot{d}, N}; [\bar{N}_{d \times \dot{d}}] \rangle, \tag{43}$$

где накрывающее многообразие $\bar{N}^{n-\frac{n-n_s}{2}}_{d \times \dot{d}}$ *и отображение* $\bar{\eta}_{d \times \dot{d}, N}$: $\bar{N}^{n-\frac{n-n_s}{2}}_{d \times \dot{d}} \to K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$ *над отображением* $\eta_{[4],N}$ *определяются аналогично понятиям в (40), (42). Тогда элемент* $J^{\frac{n-n_s}{32}}_{\mathbb{Z}/2^{[6]}}(y)$ *в группе* $Imm^{\mathbb{Z}/2^{[6]}}(n_s, n - n_s)$ *представлен* $\mathbb{Z}/2^{[6]}$*–оснащенным погружением* (h, Λ, ζ_L)*, которое допускает бикватернионную структуру.*

Следствие 19. *Предположим, что выполнены условия Теоремы 6 (т.е. задано натуральное число* n_s *вида* $2^s - 2$*,* $n > n_s$*,* $s \geq 6$ *и задан элемент* $x \in Imm^{sf}(n - \frac{n-n_s}{32}, \frac{n-n_s}{32})$*, который допускает ретракцию порядка* $q = \frac{n_s}{2}$*). Тогда элемент*

$$\delta^k_{\mathbb{Z}^{[5]}} \circ \delta^k_{\mathbb{Z}^{[4]}} \circ \delta^k_{\mathbb{Z}^{[3]}} \circ \delta^k_{\mathbb{Z}/2^{[2]}}(x), \tag{44}$$

определенный при помощи последовательной композиции гомоморфизмов (8) $k = \frac{n-n_s}{32}$*, представлен* $\mathbb{Z}/2^{[5]}$*–оснащенным погружением* (g, Ψ, η_N)*, которое допускает бикватернионную структуру.*

5 Решение Проблемы Кервера

В этом разделе мы докажем следующий результат.

Основная Теорема

Существует натуральное l_0 такое, что для произвольного натурального $l \geq l_0$, $n = 2^l - 2$, инвариант Кервера, определенный формулой (1) тривиальный.

Замечание

При условии, что элемент $x \in Imm^{sf}(n-1,1)$ допускает денадстройку порядка $2^7-1=127$, $\Theta(x)=0$, при $l \ge 9$, т.е. при $n \ge 512$.

Доказательство Основной Теоремы

Определим $n_s = 2^8-2$ и обозначим $\frac{n-n_s}{32}$, $n > n_s$ через k. Очевидно, что $k = 0 \pmod 8$. По Теореме 29 (Теорема о ретракции) существует натуральное l_0 такое, что для произвольного натурального $l \ge l_0$ произвольный элемент $x \in Imm^{sf}(n-k,k)$ допускает ретракцию порядка $\frac{n_s}{2} = 2^7-1$. Не ограничивая общности будем считать, что $l_0 \ge 9$. Поскольку выполнены размерностные условия, сформулированные в Теоремах 6,17,18 по Следствию 19, в классе кобордизма элемента (44) существует $\mathbb{Z}/2^{[5]}$-оснащенное погружение (g,Ψ,η_N), допускающее бикватернионную структуру.

Рассмотрим многообразие самопересечения L^{n_s} погружения g, $\dim(L^{n_s})=n_s$. Многообразие L^{n_s} снабжено отображением

$$\zeta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a} : L^{n_s} \to K(\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a,1). \tag{45}$$

Это отображение представляется прямым произведением двух отображений

$$\zeta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a} = \zeta_{\mathbf{Q}_a}\times\zeta_{\dot{\mathbf{Q}}_a} : L^{n_s} \to K(\mathbf{Q}_a,1)\times K(\dot{\mathbf{Q}}_a,1). \tag{46}$$

Нам потребуется следующая лемма. Рассмотрим образующий класс когомологий $\tau_{\mathbf{Q}_a}\times\tau_{\dot{\mathbf{Q}}_a} \in H^8(K(\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a,1);\mathbb{Z}/2)$. Обозначим $\zeta^*_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a}(\rho_{\mathbf{Q}_a}\times\rho_{\dot{\mathbf{Q}}_a}) \in H^8(L^{n_s};\mathbb{Z}/2)$ через $\rho_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a,L}$. Рассмотрим 16-листное накрытие $\pi_{tot,L} : \bar{L}^{n_s}_{[2]} \to L^{n_s}$. Индуцируем класс $\rho_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a}$ на накрывающее в класс $\pi^*_{tot,L}(\rho_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a,L}) \in H^8(\bar{L}^{n_s}_{[2]};\mathbb{Z}/2)$.

Лемма 20. *В группе $H^8(\bar{L}^{n_s}_{[2]};\mathbb{Z}/2)$ выполнено равенство:*

$$\pi^*_{tot,L}(\rho_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a,L}) = \bar{\zeta}^4_{d\times\dot{d},L}. \tag{47}$$

Доказательство Леммы 20

Рассмотрим эйлеров класс $e^*(\bar{\zeta}_{d\times\dot{d}})$ расслоения $\bar{\zeta}_{d\times\dot{d}}$. Расслоение $\bar{\zeta}_{d\times\dot{d}}$ изоморфна сумме Уитни 8 копий линейных расслоений, а именно 4 копий расслоения κ_d и 4 копий расслоения $\kappa_{\dot{d}}$. Лемма доказана, поскольку когомологический класс $\bar{\zeta}_{d\times\dot{d},L} \in H^2(\bar{L}^{n_s}_{[2]};\mathbb{Z}/2)$ является эйлеровым классом расслоения $\kappa_d \oplus \kappa_{\dot{d}}$.

Рассмотрим подмногообразие $i_K : K^{14} \subset L^{n_s}$, двойственное когомологическому классу $\rho^{2^9-2}_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a} \in H^{n_s-14}(L^{n_s};\mathbb{Z}/2)$. Многообразие K^{14} снабжено отображением $\zeta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a,K} : K^{14} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, 1)$, которое определено как ограничение отображения $\zeta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a,L}$ на подмногообразие $K^{14} \subset L^{n_s}$. Определено 16-листное накрытие $\pi_{tot,K} : \bar{K}^{14}_{d\times\dot{d}} \to K^{14}$. Определен индуцированный характиристический класс $\bar{\zeta}_{d\times\dot{d},K} \in H^2(\bar{K}_{d\times\dot{d}};\mathbb{Z}/2) = \bar{i}^*_{d\times\dot{d},\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a}(\bar{\zeta}_{d\times\dot{d},L})$.

Формула (41) приобретает вид:

$$\Theta^k_{sf}(y) = \langle \bar{\zeta}^{\frac{n_s}{2}}_{d\times\dot{d},L}; [\bar{L}_{[2]}] \rangle. \tag{48}$$

По Лемме 20 характеристическое число (48) равно характеристическому числу

$$\langle \bar{\zeta}^7_{d\times\dot{d},L}; [\bar{L}_{d\times\dot{d}}] \rangle. \tag{49}$$

Докажем, что характеристическое число (49) обращается в нуль. Над пространством $K(\mathbf{Q}_a, 1)$ $(K(\dot{\mathbf{Q}}_a, 1))$ определено 4-мерное расслоение $\rho_{\mathbf{Q}_a}$ $(\rho_{\dot{\mathbf{Q}}_a})$ со структурной группой $\mathbf{Q}_a$ $(\dot{\mathbf{Q}}_a)$, см. [A], раздел 2. Следовательно, над пространством $K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, 1) = K(\mathbf{Q}_a, 1) \times K(\dot{\mathbf{Q}}_a, 1)$ также определены 4-мерные расслоения $\chi_{\mathbf{Q}_a}$ и $\chi_{\dot{\mathbf{Q}}_a})$ по формуле $\chi_{\mathbf{Q}_a} = p^*_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a,\mathbf{Q}_a}(\rho_{\mathbf{Q}_a})$, $\chi_{\dot{\mathbf{Q}}_a} = p^*_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a,\mathbf{Q}_a}(\rho_{\dot{\mathbf{Q}}_a})$.

Нормальное расслоение к многообразию K^{14} представлено суммой Уитни

$$\nu_K = (\frac{n_s - 14}{8})(\zeta_{\mathbf{Q}_a,K} \oplus \zeta_{\dot{\mathbf{Q}}_a,K}) \oplus \Omega_K, \tag{50}$$

где $\zeta_{\mathbf{Q}_a,K} = \zeta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a}(\chi_{\mathbf{Q}_a})$, $\zeta_{\dot{\mathbf{Q}}_a,K} = \zeta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a}(\chi_{\dot{\mathbf{Q}}_a})$, Ω_K–ограничение нормального расслоения многобразя L^{n_s} на подмногообразие $K^{14} \subset L^{n_s}$.

Расслоение Ω_K изоморфно сумме Уитни k копий 32–мерного расслоения $\zeta_{[6]}$ со структурной группой $\mathbb{Z}/2^{[6]}$. Поскольку $k \equiv 0 \pmod 8$, то редукция $p'_1(\Omega_K) \in H^4(K;\mathbb{Z}/8)$ когомологического класса $p_1(\Omega_K) \in H^4(K;\mathbb{Z})$ в группе коэффициентов $\mathbb{Z}/8$ тривиально.

Рассмотрим многообразие $-K^{14}$, которое получено из K^{14} изменением ориентации. Рассмотрим отображение $F = id \cup -id : K^{14} \cup -K^{14} \to K^{14}$. Вычислим характеристические циклы $[p_1(\nu_K)]^{op}$, $[p_1(\nu_{-K}]^{op})$ нормального расслоения многобразий K^{14}, $-K^{14}$, где

"op" обозначает двойственность Пуанкаре, нормальное расслоение на многообразии K^{14} определено по формуле (50), а нормальное расслоение на многообразии $-K^{14}$ отличается ориентацией (ср. аналогичное вычисление в Предложении 41 из [A]).

Докажем, что если характеристический класс (49) не обращается в нуль, то цикл

$$(\omega_{\mathbf{Q}\times\dot{\mathbf{Q}}} \circ F)_*([p_1(\nu_T)]^{op} + [p_1(\nu_{-T})]^{op}]) \in H_{10}(K(\mathbf{Q}\times\dot{\mathbf{Q}},1);\mathbb{Z}), \qquad (51)$$

при разложении по базису содержит моном $4u_3 \otimes v_7 \in H_3(K(\mathbf{Q},1);\mathbb{Z}) \otimes H_7(K(\dot{\mathbf{Q}},1);\mathbb{Z}) \subset H_{10}(K(\mathbf{Q}\times\dot{\mathbf{Q}},1);\mathbb{Z})$. В этой формуле $u_7 \in H_7(K(\mathbf{Q},1);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/8$, $v_7 \in H_7(K(\dot{\mathbf{Q}},1);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/8$ образующие, $H_7(K(\mathbf{Q},1);\mathbb{Z}) \otimes H_7(K(\dot{\mathbf{Q}},1);\mathbb{Z}) \subset H_{14}(K(\mathbf{Q}\times\dot{\mathbf{Q}},1);\mathbb{Z})$ – естественное включение.

Без потери общности предположим, что $\omega_{\mathbf{Q}\oplus\dot{\mathbf{Q}},*}([T]) = u_7 \otimes v_7 + xu_3 \otimes v_{11} + \dots$, где x произвольное целое число. (По соображениям размерности, для всех остальных элементов, помеченных символом $\dots$, характеристический класс $\aleph$ не содержит элемент $u_3 \otimes v_7$). Получим:

$$F_*([p_1(\nu_T)]^{op}) = 4u_3 \otimes v_7 + 4xu_3 \otimes v_7 + \dots \in$$
$$H_3(K(\mathbf{Q},1);\mathbb{Z}) \otimes H_7(K(\dot{\mathbf{Q}},1);\mathbb{Z}) \subset H_{10}(K(\mathbf{Q}\times\dot{\mathbf{Q}},1);\mathbb{Z}),$$
$$F_*([p_1(\nu_{-T})]^{op}) = 4xu_3 \otimes v_7 + \dots.$$

Поэтому выполняется соотношение:

$$0 \ne 4u_3 \otimes v_7 + \dots = (\omega_{\mathbf{Q}\times\dot{\mathbf{Q}}} \circ F)_*([p_1(\nu_T)]^{op} + [p_1(\nu_{-T})]^{op}]).$$

В частности, отображение F не кобордантно нулю. Но с другой стороны,по конструкции отображение F кобордантно нулю. Полученное противоречие доказывает, что цикл (49) обращается в нуль.

Доказано, что на классе оснащенного кобордизма x характеристическое число (6) равно нулю. Проблема Кервера решена.

6 Доказательство Теорем 11 и 12

Начнем доказательство со следующей конструкции. Определим число n_s из условия Теоремы 6. Рассмотрим многообразие $ZZ = S^{n-\frac{n-n_s}{16}+3}/\mathbf{i} \times S^{n-\frac{n-n_s}{16}+3}/\mathbf{i}$. Это многообразие является прямым произведением стандартных линзовых пространств $\pmod 4$. Заметим, что $\dim(ZZ) > n$. Выберем внутри многообразия ZZ подмногообразие Z с особенностями в коразмерности 2, такое, что Z вкладывается в $\mathbb{R}^n$, в частности, $\dim(Z) < n$. По поводу многообразий с особенностями см. [B-R-S].

Рассмотрим в многообразии ZZ семейство подмногообразий

$$Z_j, \quad j = 0, \dots, j_{max}, \qquad j_{max} = \frac{15n + n_s + 64}{32}$$

размерности $n - \frac{n-n_s}{16} + 4$ и коразмерности $n - \frac{n-n_s}{16} + 2$, определенное по формуле

$$Z_0 = S^{n-\frac{n-n_s}{16}+3}/\mathbf{i} \times S^1/\mathbf{i}, \quad Z_1 = S^{n-\frac{n-n_s}{16}+1}/\mathbf{i} \times S^3/\mathbf{i}, \quad \dots,$$

$$Z_j = S^{n-\frac{n-n_s}{16}+3-2j}/\mathbf{i} \times S^{2j+1}/\mathbf{i}, \quad \dots, \quad Z_{j_{max}} = S^1/\mathbf{i} \times S^{n-\frac{n-n_s}{16}+3}/\mathbf{i}.$$

Вложение соответствующего подмногообразия семейства в многообразие ZZ определено как прямое произведение двух стандартных вложений.

Объединение $\cup_{j=0}^{j_{max}} Z_j$ семейства подмногообразий $\{Z_j\}$ многообразия ZZ является полиэдром (стратифицированноым подмногообразием с особенностями в коразмерности 2) размерности $n - \frac{n-n_s}{16} + 4$, которое обозначим $Z_{a\times\dot{a}} \subset ZZ$.

Рассмотрим цепочку подгрупп

$$\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d \stackrel{i_{d\times\dot{d},a\times\dot{d}}}{\longrightarrow} \mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d \stackrel{i_{a\times\dot{d},a\times\dot{a}}}{\longrightarrow} \mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, \tag{52}$$

которая индуцирует башню 2-листных накрытий:

$$XX \stackrel{p_{XX,YY}}{\longrightarrow} YY \stackrel{p_{YY,ZZ}}{\longrightarrow} ZZ. \tag{53}$$

Определим башню накрытий

$$X_{d\times\dot{d}} \stackrel{p_{Y_{a\times\dot{d}}}}{\longrightarrow} Y_{a\times\dot{d}} \stackrel{p_{Z_{a\times\dot{a}}}}{\longrightarrow} Z_{a\times\dot{a}}. \tag{54}$$

Эта башня накрытий индуцированна из цепочки подгрупп (52) при помощи вложения $Z_{a\times\dot{a}} \subset ZZ$. Таким образом, накрывающее пространство $X_{d\times\dot{d}}$ в башне (54) также является стратифицированным многообразием с особенностями в коразмерности 2. Это пространство определено явным образом как объединение семейства подмногообразий в $XX = \mathbb{RP}^{n-\frac{n-n_s}{16}+3} \times \mathbb{RP}^{n-\frac{n-n_s}{16}+3}$, определенных по формуле:

$$X_0 = \mathbb{RP}^{n-\frac{n-n_s}{16}+3} \times \mathbb{RP}^1, \quad \dots, \quad X_j = \mathbb{RP}^{n-\frac{n-n_s}{16}+3-2j} \times \mathbb{RP}^{2j+1}, \dots$$

$$X_{j_{max}} = \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^{n-\frac{n-n_s}{16}+3}.$$

Среднее накрывающее пространство $Y_{a\times\dot{d}}$ в башне (54) также является стратифицированным многообразием с особенностями в коразмерности 2. Это пространство является объединением семейства подмногообразий в $YY = S^{n-\frac{n-n_s}{16}+3}/\mathbf{i} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-\frac{n-n_s}{16}+3}$, определенных по формуле:

$$Y_0 = S^{n-\frac{n-n_s}{16}+3}/\mathbf{i} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1, \quad \dots, \quad Y_j = S^{n-\frac{n-n_s}{16}+3-2j}/\mathbf{i} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{2j+1}, \dots$$

$$X_{j_{max}} = S^1/\mathbf{i} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-\frac{n-n_s}{16}+3}.$$

Определены отображения $\eta_X : X_{d\times\dot{d}} \to K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$, $\eta_Y : Y_{a\times\dot{d}} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$, $\eta_Z : Z_{a\times\dot{a}} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$, согласованные с включением подгрупп (52) и башней накрытий (54). Отображение η_X представлено прямым произведением отображений $\eta_{X,d} \times \eta_{X,\dot{d}} : X_{d\times\dot{d}} \to K(\mathbf{I}_d, 1) \times K(\dot{\mathbf{I}}_d, 1)$. Отображение η_Y представлено прямым произведением отображений $\eta_{Y,a} \times \eta_{Y,\dot{d}} : Y_{a\times\dot{d}} \to K(\mathbf{I}_a, 1) \times K(\dot{\mathbf{I}}_d, 1)$. Отображение ζ_Z представлено прямым произведением отображений $\zeta_{Z,a} \times \zeta_{Z,\dot{a}} : Z_{a\times\dot{a}} \to K(\mathbf{I}_a, 1) \times K(\dot{\mathbf{I}}_a, 1)$.

Определим многообразие с особенностями J. Для произвольного $j = 0, \dots, j_{max}$ определим пространство $J_j = S^{n-\frac{n-n_s}{16}-2j+3} \times S^{2j+1}$. Сферы $S^{n-\frac{n-n_s}{16}-2j+3}$, S^{2j+1} переобозначим для краткости через $J_{j,1}$, $J_{j,2}$ соответственно. Справедлива формула $J_j = J_{j,1} \times J_{j,2}$

Определено стандартное включение $i_{J_j} : J_{j,1} \times J_{j,2} \subset S^{\frac{n-n_s}{16}+3} \times S^{\frac{n-n_s}{16}+3}$, где каждый сомножитель включается в сферу-образ как стандартная подсфера, лежащая в подпространстве с соответствующим числом первых ненулевых координат. Объединение $\cup_{j=0}^{j_{max}} Im(i_{J_j})$ образов всех этих вложений является искомым пространством, которое обозначим через $J \subset S^{\frac{n-n_s}{4}+3} \times S^{\frac{n-n_s}{4}+3}$.

Определим разветвленное накрытие

$$\varphi_Z : Z_{a\times\dot{a}} \to J. \tag{55}$$

Для каждого $j = 0, \dots, j_{max}$ определим отображение $\varphi_j : Z_j \to J_j$. Определены стандартные разветвленные накрытия (см. [A], глава 3, Определение отображения d):

$$p_{Z_j,1} : S^{\frac{n-n_s}{16}-2j+3}/\mathbf{i} \to S^{\frac{n-n_s}{16}-2j+3}, \tag{56}$$

$$p_{Z_j,2} : S^{2j+3}/\mathbf{i} \to S^{2j+3}. \tag{57}$$

Отображение φ_{Z_j} определено как декартово произведение разветвленных накрытий

$$\varphi_{Z_j} = p_{Z_j,1} \times p_{Z_j,2} : Z_j = S^{\frac{n-n_s}{16}-2j+3}/\mathbf{i} \times S^{2j+1}/\mathbf{i} \to J_{j,1} \times J_{j,2}.$$

Определено разветвленное накрытие (55) в результате склейки разветвленных накрытий φ_{Z_j} по подпространствам попарных пересечений семейства подмногообразий Z_j в многообразии ZZ.

Определим разветвленное накрытие

$$\varphi_Y : Y_{a\times\dot{d}} \to J. \tag{58}$$

Для каждого $j = 0, \dots, j_{max}$ определим отображение $\varphi_j : Y_j \to J_j$. Определены стандартные разветвленные накрытия

$$p_{Y_j,1} : S^{n-\frac{n-n_s}{16}-2j+3}/\mathbf{i} \to S^{n-\frac{n-n_s}{16}-2j+3}, \tag{59}$$

$$p_{Y_j,2} : \mathbb{R}\mathrm{P}^{2j+3} \to S^{2j+3}. \tag{60}$$

Отображение φ_{Y_j} определено как декартово произведение разветвленных накрытий

$$\varphi_{Y_j} = p_{Y_j,1} \times p_{Y_j,2} : Y_j = S^{\frac{n-n_s}{16}-2j+3}/\mathbf{i} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{2j+1} \to J_{j,1} \times J_{j,2}.$$

Определено разветвленное накрытие (58) в результате склейки разветвленных накрытий φ_{Y_j} по подпространствам попарных пересечений семейства подмногообразий Z_j в многообразии ZZ.

Определим вложение $i_J : J \subset \mathbb{R}^n$. Это вложение строится в результате склейки стандартных вложений торов в семейство $j_{max}+1$ евклидовых подпространств в $\mathbb{R}^n$ размерности $n - \frac{n-n_s}{4} + 6$, проходящих через начало координат. Подпространство с номером j семейства содержит пару пространств дополнительных размерностей $\mathbb{R}^{n-\frac{n-n_s}{16}-2j+4}$, $\mathbb{R}^{2j+2}$, пересекающихся в начале координат. Пара подпространств с соседними номерами пересекаются по подпространству коразмерности 2. Пересечение в пространстве с меньшим (большим) соседним номером теряет коразмерность 2 вдоль первого (второго) подпространства выбранной пары. Внутри пространства с номером j семейства рассматривается стандартный тор J_j с образующими вдоль выбранных дополнительных подпространств. Объединяя семейство вложенний торов, получим вложение i_J.

Конструкция отображения $d_Y : Y_{a\times\dot{d}} \to \mathbb{R}^n$

Сначала определим вспомогательное отображение $\hat{d}_Z : Z_{a\times\dot{a}} \to \mathbb{R}^n$. Это отображение определено в результате малой регулярной PL–деформации композиции $i_J \circ \varphi_Z : Z_{a\times\dot{a}} \to \mathbb{R}^n$, причем сама деформация и ее калибр ε выбираются в процессе доказательства (см. аналогичное построение в [A], Лемма 24). Рассмотрим композицию $\hat{d}_Z \circ \varphi_Y : Y_{a\times\dot{d}} \to \mathbb{R}^n$ и определим искомое отображение $d_Y : Y_{a\times\dot{d}} \to \mathbb{R}^n$ в результате малой регулярной PL–деформации этой композиции калибра ε', причем $\varepsilon' << \varepsilon$.

Конструкция отображения $d_X : X_{a\times\dot{d}} \to \mathbb{R}^n$

Определим вспомогательное отображение $\hat{d}_Y : Y_{a\times\dot{d}} \to \mathbb{R}^n$. Это отображение определено в результате малой регулярной PL–деформации композиции $i_J \circ \varphi_Y : Y_{a\times\dot{d}} \to \mathbb{R}^n$, причем сама деформация и ее калибр ε выбираются в процессе доказательства (см. аналогичное построение в [A], Лемма 24). Рассмотрим композицию $\hat{d}_Y \circ \varphi_X : X_{d\times\dot{d}} \to \mathbb{R}^n$ и определим искомое отображение $d_X : Y_{d\times\dot{d}} \to \mathbb{R}^n$ в результате малой регулярной PL–деформации этой композиции калибра ε', причем $\varepsilon' << \varepsilon$.

$\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d$–структура для отображения $d_X : X_{d\times\dot{d}} \to \mathbb{R}^n$

Рассмотрим полиэдр самопересечения отображения $\hat{d}_Y : Y_{a\times\dot{a}} \to \mathbb{R}^n$ и обозначим его через $\hat{N}(d_Y)$. Полиэдр $\hat{N}(d_Y)$ является многообразием с особенностями (в коразмерности 2) с краем, этот край обозначим через $\partial\hat{N}(d_Y)$.

Рассмотрим полиэдр самопересечения отображения $d_X : X_{d\times\dot{d}} \to \mathbb{R}^n$ и обозначим его через $N(d_X)$. Полиэдр $N(d_X)$ является многообразием с особенностями (в коразмерности 2) с краем, этот край обозначим через $\partial N(d_X)$. Многообразие с особенностями с краем $N(d_X)$ представляется в объединение двух многообразий с особенностями с краем $N(d_X) = N_{X,antigiag} \cup N_{X,\Gamma}$ по общему краю, таким образом, что:

1. Многообразие с особенностями с краем $N_{X,\Gamma}$ является накрывающим пространством при регулярном 4-листном накрытии $p_{N_{X,\Gamma}} : N_{X,\Gamma} \to \hat{N}(d_Y)$.

2. Многообразие с особенностями с краем $N_{X,antidiag}$ возникает при деформации двулистного накрытия $p_{Y_{a\times\dot{d}}} : X_{d\times\dot{d}} \to Y_{a\times\dot{d}}$ внутри регулярной (погруженной) окрестности неособых точек полиэдра $\hat{d}_Y(Y_{a\times\dot{d}})$.

Рассмотрим полиэдр самопересечения отображения $d_X : X_{d\times\dot{d}} \to \mathbb{R}^n$ и обозначим его через $N(d_X)$. Полиэдр $N(d_X)$ является многообразием с особенностями (в коразмерности 2) с краем, этот край обозначим через $\partial N(d_X)$. Многообразие с особенностями с краем $N(d_X)$ представляется в объединение двух многообразий с особенностями с краем $N(d_X) = N_{X,antigiag} \cup N_{X,\Gamma}$ по общему краю, таким образом, что:

1. Многообразие с особенностями с краем $N_{X,\Gamma}$ является накрывающим пространством при регулярном 4-листном накрытии $p_{N_{X,\Gamma}} : N_{X,\Gamma} \to N(d_Y)$.

2. Многообразие с особенностями с краем $N_{X,antidiag}$ возникает при деформации двулистного накрытия p_X внутри регулярной (погруженной) окрестности неособых точек полиэдра $d_Y(Y_{a\times\dot{d}})$.

Повторяя рассуждения из Леммы 24 [A], определим отображение

$$\zeta_{a\times\dot{d},N(d_X)} : (N(d_X), \partial N(d_X)) \to (K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1), K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)). \qquad (61)$$

Это отображение определено в результате склейки характеристического отображения на $N_{X,antidiag}$ с предварительно построенным отображением на $N_{Y,\Gamma}$, по антидиагональной части границы, где указанный отображения гомотопны. Граничные условия на $\partial N(d_X)$ определяются композицией $\partial N(d_X) \subset X_{d\times\dot{d}} \stackrel{\eta_{X_{d\times\dot{d}}}}{\longrightarrow} K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$. Отображение (61) определяет $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d$ структуру для отображения d_X.

$\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–структура для отображения $d_Y : Y_{a\times\dot{d}} \to \mathbb{R}^n$

Аналогично предыдущему построению, определим многообразие с особенностями с краем $N(d_Y)$ и отображение

$$\zeta_{a\times\dot{a},N(d_Y)} : (N(d_Y), \partial N(d_Y)) \to (K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1), K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)). \qquad (62)$$

Граничные условия на $\partial N(d_Y)$ определяются композицией $\partial N(d_Y) \subset Y_{a\times\dot{d}} \stackrel{\eta_{Y_{a\times\dot{d}}}}{\longrightarrow} K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$. Отображение (62) определяет $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d$ структуру для отображения d_Y.

Конструкция $\mathbb{Z}/2^{[2]}$–оснащенного погружения с $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d$–структурой в Теореме 11

Пусть задано $\mathbb{Z}/2^{[2]}$–оснащенное погружение (g, Ψ, η_N), $g : N^{n-\frac{n-n_s}{16}} \looparrowright \mathbb{R}^n$. По условию теоремы задано отображение $\eta_{d\times\dot{d},N} : N^{n-\frac{n-n_s}{16}} \to K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$, при этом выполнено уравнение (29). Отображение $\eta_{d\times\dot{d},N}$ определяет однозначно (с точностью до гомотопии) отображение $\eta_{d\times\dot{d},X} : N^{n-\frac{n-n_s}{16}} \to X_{d\times\dot{d}}$, поскольку $X_{d\times\dot{d}}$ вкладывается в $K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$ как остов стандартного клеточного разбиения, который содержит меньший остов стандартного клеточного разбиения размерности $n - \frac{n-n_s}{16} + 1 = \dim(N) + 1$.

Рассмотрим композицию $d_X \circ \eta_{d\times\dot{d},X} : N^{n-\frac{n-n_s}{16}} \to \mathbb{R}^n$ и рассмотрим малую деформацию этого отображения в погружение g_1 в классе регулярной гомотопии данного погружения $g: N^{n-\frac{n-n_s}{16}} \looparrowright \mathbb{R}^n$. Калибр δ деформации $d_X \circ \eta_{d\times\dot{d},X} \mapsto g_1$ выбирается много меньшим ε'. Погружение g_1 снабжено $\mathbb{Z}/2^{[2]}$–оснащением Ψ_1 с тем же характеристическим классом η_N, при этом тройка (g_1,Ψ_1,η_N) определяет в группе $Imm^{\mathbb{Z}/2^{[2]}}(n-\frac{n-n_s}{16},\frac{n-n_s}{16})$ элемент y.

Обозначим через $L^{n-\frac{n-n_s}{8}}$ многообразие самопересечения погружения g_1. Определено разбиение

$$L^{n-\frac{n-n_s}{8}} = L_{cycl}^{n-\frac{n-n_s}{8}} \cup L_{d\times\dot{d}}^{n-\frac{n-n_s}{8}} \tag{63}$$

по общей границе. При этом многообразие $L_{cycl}^{n-\frac{n-n_s}{8}}$ погружено в регулярную (погруженную) окрестность полиэдра $N(d_X)$. Многообразие $L_{d\times\dot{d}}^{n-\frac{n-n_s}{8}}$ погружено в регулярную (погруженную) регулярных точек полиэдра $d_X(X_{d\times\dot{d}})$ так, что определено отображение

$$\pi_{L_{d\times\dot{d}}} : L_{d\times\dot{d}}^{n-\frac{n-n_s}{8}} \to X_{d\times\dot{d}} \tag{64}$$

проекции этой части многообразия (63) на центральный полиэдр в рассматриваемой окрестности. Общая граница этих многообразий погружена в регулярную (погруженную) окрестность критических значений отображения $d_X : X_{d\times\dot{d}} \to \mathbb{R}^n$ (см. аналогичное Предложение 20 из [A]).

Определим искомое отображение

$$\zeta_{a\times\dot{d},L} : L^{n-\frac{n-n_s}{8}} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d),1). \tag{65}$$

Отображение $\zeta_{a\times\dot{d}}$ зададим отдельно на компонентах разбиения (63). На компоненте $L_{cycl}^{n-\frac{n-n_s}{8}}$ отображение $\zeta_{a\times\dot{d},L}$ определено отображением (61), которое продолжается на всю погруженную регулярную окрестность многообразия с особенностями $N(d_X)$ вне критических значений. На компоненте $L_{d\times\dot{d}}^{n-\frac{n-n_s}{8}}$ отображение $\zeta_{a\times\dot{d},L}$ определено композицией

$$L_{d\times\dot{d}}^{n-\frac{n-n_s}{8}} \stackrel{\pi_{L_{d\times\dot{d}}}}{\longrightarrow} X_{d\times\dot{d}} \stackrel{\eta_X}{\longrightarrow} K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d,1) \stackrel{i_{d\times\dot{d},a\times\dot{d}}}{\longrightarrow} K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d,1).$$

На общей границе указанные отображения можно склеить, что следует из выполнения граничных условий для отображения (61). Отображение (65), определяющее $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d$–структуру $\mathbb{Z}/2^{[2]}$–оснащенного погружения (g_1,Ψ_1,η_N) определено.

Конструкция $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенного погружения с бициклической структурой в Теореме 12

Пусть задано $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенное погружение (g,Ψ,η_N), $g : N^{n-\frac{n-n_s}{8}} \looparrowright \mathbb{R}^n$, определяющее элемент $y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(n-\frac{n-n_s}{8},\frac{n-n_s}{8})$. По условию теоремы задано отображение $\eta_{a\times\dot{d}} : N^{n-\frac{n-n_s}{8}} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$, при этом выполнено уравнение (30). Отображение $\eta_{a\times\dot{d},N}$ определяет однозначно (с точностью до гомотопии) отображение $\eta_{d\times\dot{d},X} : N^{n-\frac{n-n_s}{8}} \to X_{d\times\dot{d}}$, поскольку $X_{d\times\dot{d}}$ вкладывается в $K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$ как остов стандартного клеточного разбиения, который заведомо содержит меньший остов стандартного клеточного разбиения размерности $n-\frac{n-n_s}{8}+1 = \dim(N)+1$.

Рассмотрим композицию $d_Y \circ \eta_{a\times\dot{d},Y} : N^{n-\frac{n-n_s}{8}} \to \mathbb{R}^n$ и рассмотрим малую деформацию этого отображения в погружение g_1 в классе регулярной гомотопии данного погружения $g : N^{n-\frac{n-n_s}{8}} \looparrowright \mathbb{R}^n$. Калибр δ деформации $d_Y \circ \eta_{a\times\dot{d},Y} \mapsto g_1$ выбирается много меньшим ε'. Погружение g_1 снабжено $\mathbb{Z}/3^{[3]}$–оснащением Ψ_1 с тем же характеристическим классом η_N, при этом тройка (g_1,Ψ_1,η_N) определяет в группе $Imm^{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(n-\frac{n-n_s}{8},\frac{n-n_s}{8})$ элемент y.

Обозначим через $L^{n-\frac{n-n_s}{4}}$ многообразие самопересечения погружения g_1. Определено разбиение

$$L^{n-\frac{n-n_s}{4}} = L_{cycl}^{n-\frac{n-n_s}{4}} \cup L_{a\times\dot{d}}^{n-\frac{n-n_s}{4}} \qquad (66)$$

по общей границе. При этом многообразие $L_{cycl}^{n-\frac{n-n_s}{4}}$ погружено в регулярную (погруженную) окрестность полиэдра $N(d_Y)$. Многообразие $L_{a\times\dot{d}}^{n-\frac{n-n_s}{4}}$ погружено в регулярную (погруженную) регулярных точек полиэдра $d_Y(Y_{a\times\dot{d}})$ так, что определено отображение

$$\pi_{L_{a\times\dot{d}}} : L_{a\times\dot{d}}^{n-\frac{n-n_s}{4}} \to Y_{a\times\dot{d}} \qquad (67)$$

проекции этой части многообразия (66) на центральный полиэдр в рассматриваемой окрестности. Общая граница этих многообразий погружена в регулярную (погруженную) окрестность критических значений отображения $d_Y : Y_{a\times\dot{d}} \to \mathbb{R}^n$ (см. аналогичное Предложение 20 из [A]).

Определим искомое отображение

$$\zeta_{a\times\dot{a},L} : L^{n-\frac{n-n_s}{4}} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1). \qquad (68)$$

Отображение $\zeta_{a\times\dot{a}}$ зададим отдельно на компонентах разбиения (66). На компоненте $L_{cycl}^{n-\frac{n-n_s}{4}}$ отображение $\zeta_{a\times\dot{a},L}$ определено отображением (62), которое продолжается на всю регулярную окрестность многообразия с особенностями $N(d_Y)$. На компоненте $L_{a\times\dot{a}}^{n-\frac{n-n_s}{4}}$ отображение $\zeta_{a\times\dot{a},L}$ определено композицией

$$L_{a\times\dot{d}}^{n-\frac{n-n_s}{4}} \stackrel{\pi_{L_{a\times\dot{d}}}}{\longrightarrow} Y_{a\times\dot{d}} \stackrel{\eta_Y}{\longrightarrow} K(\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_d,1) \stackrel{i_{a\times\dot{d},a\times\dot{a}}}{\longrightarrow} K(\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,1).$$

На общей границе указанные отображения можно склеить, что следует из выполнения граничных условий для отображения (62). Отображение (68), определяющее $\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a$–структуру $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенного погружения (g_1,Ψ_1,η_N) определено.

Проверка уравнения (29)

Рассмотрим $\mathbb{Z}/2^{[2]}$–оснащенное погружение (g_1,Ψ_1,η_N), построенное выше. Это $\mathbb{Z}/2^{[2]}$–оснащенное погружение определяет тот же элемент $y\in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(n-\frac{n-n_s}{16},\frac{n-n_s}{16})$. По условию многообразие $N^{n-\frac{n-n_s}{16}}$ снабжено отображением $\eta_{d\times\dot{d},N}:N^{n-\frac{n-n_s}{16}}\to K(\mathbf{I}_d\times\dot{\mathbf{I}}_d,1)$. Рассмотрим многообразие $L^{n-\frac{n-n_s}{8}}$ самопересечения погружения g_1, снабженное отображением (65).

Определим подмногообразие

$$N_\eta^{n-\frac{n-n_s}{2}}\subset N^{n-\frac{n-n_s}{16}}, \tag{69}$$

двойственное в смысле Пуанкаре коциклу $\eta^{\frac{7(n-n_s)}{32}}\in H^{\frac{7(n-n_s)}{16}}(N^{n-\frac{n-n_s}{16}};\mathbb{Z}/2)$. Рассмотрим погружение (общего положения) $g_{N_\eta}:N_\eta^{n-\frac{n-n_s}{2}}\looparrowright\mathbb{R}^n$, определенное как ограничение погружения g_1 на подмногообразие (69). Обозначим через $L_\eta^{n_s}$ многообразие самопересечения погружения g_{N_η}. Определено вложение подмногообразий

$$L_\eta^{n_s}\subset L^{n-\frac{n-n_s}{8}}. \tag{70}$$

Определено отображение

$$\zeta_{a\times\dot{d},L_\eta}:L_\eta^{n_s}\to K(\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_d,1)$$

как ограничение отображения (65) на подмногообразие (70). Заметим, что подмногообразие (70) представляет гомологический класс, двойственный в смысле Пуанкаре коциклу $\zeta^{\frac{7(n-n_s)}{32}} \in H^{\frac{7(n-n_s)}{8}}(L^{n-\frac{n-n_s}{8}};\mathbb{Z}/2)$.

Поэтому уравнение (27) эквивалентно следующему:

$$\Theta_{\mathbb{Z}/2^{[2]}}^{\frac{n-n_s}{32}} = \langle \bar{\zeta}_{d\times\dot{d},L_\eta}^{\frac{n_s}{2}};[\bar{L}_{d\times\dot{d},\eta}]\rangle. \qquad (71)$$

Каноническое 2-листное накрывающее $\bar{L}_{\eta,d\times\dot{d}}^{n_s}$ над многообразием (70) естественно погружено в исходное многообразие $N^{n-\frac{n-n_s}{16}}$ и его фундаментальный цикл представляет (по Теореме Герберта) гомологический класс, двойственный в смысле Пуанкаре коциклу $\eta^{\frac{15(n-n_s)}{32}} \in H^{\frac{15(n-n_s)}{16}}(N^{n-\frac{n-n_s}{16}};\mathbb{Z}/2)$. Уравнение равнение (29) эквивалентно следующему:

$$\Theta_{\mathbb{Z}/2^{[2]}}^{\frac{n-n_s}{32}}(y) = \langle \eta_{d\times\dot{d},N_\eta}^{\frac{n_s}{2}};[N_\eta]\rangle, \qquad (72)$$

где отображение $\eta_{d\times\dot{d},N_\eta} : N_\eta^{n_s} \to K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$ определено в результате ограничения отображения $\eta_{d\times\dot{d},N}$ на подмногообразие (69).

Для доказательства теоремы осталось заметить, что правые части равенств (71) (72) равны. Это доказано в следующей лемме. Теорема 11 доказана.

Лемма 21. *Классы гомологий*

$$\bar{\zeta}_{d\times\dot{d},*}([\bar{L}_{d\times\dot{d},\eta}] \in H_{n_s}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1);\mathbb{Z}/2), \qquad (73)$$

$$\eta_{d\times\dot{d},*}([\bar{L}_{d\times\dot{d},\eta}]) \in H_{n_s}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1);\mathbb{Z}/2) \qquad (74)$$

равны.

Переформулируем лемму и докажем более общее утверждение. Класс гомологий (74) можно обобщить и определить в более общей ситуации, без предположения о том, что многообразие $L_\eta^{n_s}$ является замкнутым.

Пусть определено замкнутое ориентированное многообразие R^{2r} с особенностями в коразмерности 2 размерности $\dim(R) = 2r$, $\frac{n}{2} \le 2r \le n - \frac{n-n_s}{16}$. Предположим, что задано отображение $\eta_{d\times\dot{d},R} : R^{2r} \to X_{d\times\dot{d}} \stackrel{\eta_{X},d\times\dot{d}}{\longrightarrow} K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$.

Рассмотрим отображение $g_R : R^{2r} \to \mathbb{R}^n$ общего положения, которое определено в результате малой деформацией общего положения отображения $R^{2r} \stackrel{g_{d\times\dot{d},R}}{\longrightarrow}\to X_{d\times\dot{d}} \stackrel{d_X}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n$. Определено ориентированное многообразие с особенностями T^{n-4r} самопересечния отображения g_R. Край ∂T^{n-4r} многообразия T^{n-4r} состоит из критических точек отображения g_R. Определено каноническое 2-листное накрытие $\bar{T}^{n-4r} \to T^{n-4r}$, разветвленное вдоль края. Определено отображение $\zeta_{d\times\dot{d},T} : \bar{T}^{n-4r} \to K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$ в результате композиции погружения $\bar{T}^{n-4r} \looparrowright R^{2r}$ с отображением $\eta_{d\times\dot{d},R}$.

Определен класс гомологий

$$\eta_{d\times\dot{d},T,*}([\bar{T}]) \in H_{n-4r}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z}/2), \tag{75}$$

обобщающий класс гомологий (74). Класс гомологий (73) также можно обобщить на рассматриваемый случай.

Определено разбиение

$$T^{n-4r} = T^{n-4r}_{cycl} \cup T^{n-4r}_{d\times\dot{d}}, \tag{76}$$

аналогичное разбиению (63).

Край ∂T^{n-4r} многообразия с особенностями T^{n-4r} целиком лежит в компоненте $T^{n-4r}_{d\times\dot{d}}$ и проекция

$$\pi_{T_{d\times\dot{d}}} : T^{n-4r}_{d\times\dot{d}} \to X_{d\times\dot{d}} \tag{77}$$

аналогичная отображению (64), переводит край ∂T^{n-4r} в регулярную часть многообразия с особенностями $X_{d\times\dot{d}}$.

Определено отображение

$$\zeta_{a\times\dot{d},T} : (T^{n-4r}, \partial T^{n-4r}) \to (K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1), (K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)), \tag{78}$$

аналогичное отображению (65).

Поскольку коразмерность отображения g_R четна, и многообразие с особенностями R^{2r} является ориентированным, то и многообразие с особенностями с краем T^{n-4r} также является ориентированным. Следовательно относительный класс гомологий

$$\zeta_{a\times\dot{d},T,*} : ([T^{n-4r}, \partial T^{n-4r}]) \in H_{n-4r}(K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1), (K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)); \mathbb{Z}/2)$$

является приведением по модулю 2 соответствующего целочисленного класса из группы $H_{n-4r}(K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1), K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)); \mathbb{Z})$.

Ограничение отображения $\zeta_{a\times\dot{d},T}$ на край ∂T^{n-4r} принимает значения в подпространстве $K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1) \subset K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$. Образ фундаментального цикла $\zeta_{a\times\dot{d},T,*}([\partial T^{n-4r}])$ многообразия с особенностями, краем, определяет нулевой цикл в группе $H_{n_s-1}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z}/2)$, поскольку лежит в образе нулевой группы $H_{n-4r-1}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z})$ при гомоморфизме приведения по модулю 2 (см. аналогичное утверждение в Лемме 16 из [A]). Следовательно, класс гомологий

$$\bar{\zeta}_{d \times \dot{d},*}([\bar{T}_{d \times \dot{d}}] \in H_{n-4r}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z}/2) \qquad (79)$$

определен.

В частности, характеристические классы (75), (79) определены, если в качестве многообразия R^{2r} выбрать многообразие $R_i^{2r} = \mathbb{RP}^{2r-2i-1} \times \mathbb{RP}^{2i+1}$, а в качестве отображения $\eta_{d \times \dot{d}, R}$ выбрать произвольное стандартное отображение, определенное как декартово произведение покоординатных вложениий

$$\eta_{d \times \dot{d}, R_i} : \mathbb{RP}^{2r-2i-1} \times \mathbb{RP}^{2i+1} \subset X_j \xrightarrow{\varphi_j} X_{d \times \dot{d}} \xrightarrow{\eta_{d \times \dot{d}, X}} K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1), \qquad (80)$$

при произвольных значениях i, j, $0 \le 2i \le 2r-2$, $0 \le j \le j_{max}$.

Лемма 22. *Обозначим образ фундаментального класса* $\eta_{d \times \dot{d}, R_i,*}([R_i]) \in H_{2r}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z})$ *через* $(2r-2i-1 \times 2i+1)$.

–1. Для класса гомологий $(2r-2i-1 \times 2i+1) \in H_{2r}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z})$, *заданного отображением* (80) *класс гомологий* (75), *лежащий в той же группе, равен* $(4r-4i-2-\frac{n}{2} \times 4i+2-\frac{n}{2})$, *если оба числа в скобках строго положительные, и равен нулю, если хотябы одно из чисел в скобках отрицательно.*

–2. Характеристический класс (79), *обобщающий класс* (73) *для ориентированных многообразий с особенностями при* $2r = n - \frac{n+n_s}{2}$, *совпадает с классом* (75), *обобщающий характеристический класс* (74).

Доказательство Леммы 22

Утверждение 1 доказывается прямым вычислением, которое опускается. Утверждение 2 вытекает из построения отображения d_X, см. аналогичную формулу (16) в [A]. Лемма 22 доказана.

Доказательство Леммы 21

Набор стандартных отображений (80) при $2r = n - \frac{n+n_s}{2}$ реализует все элементы в группе $H_{n-\frac{n-n_s}{2}}(X_{d \times \dot{d}}; \mathbb{Z})$. Поскольку многообразие $N_\eta^{n-\frac{n-n_s}{2}}$ оказывается ориентированным, отображение $g_\eta : N_\eta^{n-\frac{n-n_s}{2}} \to \mathbb{R}^n$ кобордантно дизъюнктному набору стандартных отображений (80) в классе отображений ориентированных многообразий с особенностями в коразмерности 2. Характеристические классы отображения при кобордизме отображения сохраняются. Следовательно, характеристические числа (73) (74) равны. Лемма 21 доказана.

Проверка уравнения (30)

Рассмотрим $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенное погружение (g_1, Ψ_1, η_N), построенное выше. Это погружение определяет элемент $y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[3]}}(n - \frac{n-n_s}{8})$. Многообразие $N^{n-\frac{n-n_s}{8}}$ снабжено отображением $\eta_{a\times\dot{d},N} : N^{n-\frac{n-n_s}{8}} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$. Рассмотрим многообразие $L^{n-\frac{n-n_s}{4}}$ самопересечения погружения g_1, снабженное отображением (68).

Определим подмногообразие

$$N_\eta^{n-\frac{n-n_s}{2}} \subset N^{n-\frac{n-n_s}{8}}, \tag{81}$$

двойственное в смысле Пуанкаре коциклу $\eta^{\frac{3(n-n_s)}{32}} \in H^{\frac{3(n-n_s)}{8}}(N^{n-\frac{n-n_s}{8}}; \mathbb{Z}/2)$. Рассмотрим погружение (общего положения) $g_{N_\eta} : N_\eta^{n-\frac{n-n_s}{2}} \looparrowright \mathbb{R}^n$, определенное как ограничение погружения g_1 на подмногообразие (81). Обозначим через $L_\eta^{n_s}$ многообразие самопересечения погружения g_{N_η}. Определено вложение подмногообразий

$$L_\eta^{n_s} \subset L^{n-\frac{n-n_s}{4}}. \tag{82}$$

Определено отображение

$$\zeta_{a\times\dot{a},L_\eta} : L_\eta^{n_s} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$$

как ограничение отображения (68) на подмногообразие (82). Заметим, что подмногообразие (82) представляет гомологический класс, двойственный в смысле Пуанкаре коциклу $\zeta^{\frac{3(n-n_s)}{16}} \in H^{\frac{3(n-n_s)}{4}}(L^{n-\frac{n-n_s}{4}}; \mathbb{Z}/2)$. Каноническое 2-листное накрывающее $\bar{L}_\eta^{n_s}$ над многообразием (82) естественно погружено в исходное многообразие $N^{n-\frac{n-n_s}{8}}$ и его фундаментальный цикл представляет (по Теореме Герберта) гомологический класс, двойственный в смысле Пуанкаре коциклу $\eta^{\frac{7(n-n_s)}{32}} \in H^{\frac{7(n-n_s)}{8}}(N^{n-\frac{n-n_s}{8}}; \mathbb{Z}/2)$. Уравнение (28) эквивалентно следующему:

$$\Theta_{\mathbb{Z}/2^{[3]}}^{\frac{n-n_s}{32}}(y) = \langle \bar{\zeta}_{d\times\dot{d},L_\eta}^{\frac{n_s}{2}}; [\bar{L}_{d\times\dot{d},\eta}] \rangle. \tag{83}$$

Уравнение равнение (30) эквивалентно следующему:

$$\Theta_{\mathbb{Z}/2^{[3]}}^{\frac{n-n_s}{32}}(y) = \langle \bar{\eta}_{d\times\dot{d},N_\eta}^{\frac{n_s}{2}}; [N_{d\times\dot{d},\eta}]\rangle, \qquad (84)$$

где многообразие $\bar{N}_{d\times\dot{d},\eta}$ и отображение $\bar{\eta}_{d\times\dot{d},N_\eta} : N_{d\times\dot{d},\eta} \to K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$ определены как 2-листное накрывающее над многообразием $N^{\frac{n+n_s}{2}}$ и отображением $\eta_{a\times d,N_\eta} : N_\eta \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$.

Для доказательства теоремы осталось заметить, что правые части равенств (83) (84) равны. Это доказано в следующей лемме. Теорема 12 доказана.

Лемма 23. *Классы гомологий*

$$\bar{\zeta}_{d\times\dot{d},L_\eta,*}([\bar{L}_{d\times\dot{d},\eta}] \in H_{n_s}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z}/2), \qquad (85)$$

$$\bar{\eta}_{d\times\dot{d},*}([\bar{L}_{d\times\dot{d},\eta}]) \in H_{n_s}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z}/2) \qquad (86)$$

равны.

Потребуется лемма, аналогичная Лемме 22.

Определим характеристические классы, аналогичные (75), (79). Для заданного натурального r, $r = 1 \pmod 2$, определим семейство ориентированных многообразий $R_i^{2r} = S^{2r-4i+1}/\mathbf{i} \times \mathbb{RP}^{4i-1}$, $1 \le i \le \frac{r-2}{2}$, $2r \le n - \frac{n-n_s}{32} = \dim(Y_{a\times\dot{d}}) - 4$. В качестве отображения $\eta_{a\times\dot{d},R} : R^{2r} \to Y_{a\times\dot{d}}$ выберем произвольное стандартное отображение, определенное как декартово произведение покоординатных вложениий

$$\eta_{a\times\dot{d},R_i} : S^{2r-4i+1}/i \times \mathbb{RP}^{4i-1} \subset Y_j \xrightarrow{\varphi_{Y_j}} Y_{a\times\dot{d}} \xrightarrow{\eta_{a\times\dot{d},Y}} K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1), \qquad (87)$$

при некоторых произвольных значениях i, j, $0 \le i \le \frac{r-2}{2}$, $0 \le j \le j_{max}$.

Определено отображение $g_R : R^{2r} \to \mathbb{R}^n$, как результат деформации общего положения отображения $d_Y \circ \eta_{a\times\dot{d},R}$. Определено ориентированное многообразие с особенностями с краем T^{4r-n} размерности $\dim(T) = 4r - n$, как многообразие самопересечения отображения $g_{d\times\dot{d},R}$. Многообразие с особенностями $\bar{T}^{4r-n}$ служит каноническим 2-листным разветвленным накрывающим над многообразием T^{4r-n}. Поскольку многообразие с особенностями $\bar{T}^{4r-n}$ погружено в многообразие R^{2r}, поэтому пределен класс гомологий

$$\bar{\zeta}_{d\times\dot{d},T,*}([\bar{T}_{d\times\dot{d}}] \in H_{4r-n}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z}/2), \qquad (88)$$

обобщающий класс гомологий (85).

Определен класс гомологий
$$\eta_{d\times\dot{d},T,*}([\bar{T}_{d\times\dot{d}}]) \in H_{4r-n}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z}/2), \qquad (89)$$
обобщающий класс гомологий (86).

Лемма 24. *Обозначим образ фундаментального класса $\eta_{a\times\dot{d},R_i,*}([R_i]) \in H_{2r}(K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z})$ через $(2r-4i+1 \times 4i-1)$.*

–1. Для класса гомологий $(2r-4i+1 \times 4i-1) \in H_{2r}(K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z})$, заданного отображением (87), класс гомологий (89), лежащий в той же группе, равен $(4r-8i+2-\frac{n}{2} \times 8i-2-\frac{n}{2})$, если оба числа в скобках строго положительные, и равен нулю, если хотябы одно из чисел отрицательно.

–2. Характеристический класс (88), обобщающий класс (85) для ориентированных многообразий с особенностями при $2r = n - \frac{n+n_s}{2}$, совпадает с классом (89), обобщающий характеристический класс (86).

Доказательство Леммы 24

Доказательство аналогично доказательству Леммы 22.

Доказательство Леммы 23

Рассмотрим пару многообразий, определенных формулой (81) и переобозначим эту пару многообразий через
$$N^{n-\frac{n-n_s}{2}}_{\eta,[3]} \subset N^{n-\frac{n-n_s}{8}}_{[3]}. \qquad (90)$$
Многообразие $N^{n-\frac{n-n_s}{8}}_{[3]}$ снабжено отображением
$$\eta_{a\times\dot{d},[3]} : N^{n-\frac{n-n_s}{8}}_{[3]} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1). \qquad (91)$$
Многообразие $N^{n-\frac{n-n_s}{8}}_{[3]}$ с точностью до нормального кобордизма совпадает с многообразием $L^{n-\frac{n-n_s}{8}}$ из Теоремы 11, т.е. является $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенным многообразием самопересечения $\mathbb{Z}/2^{[2]}$–оснащенного погружения (g_1, Ψ_1, η_N) многообразия $N^{n-\frac{n-n_s}{16}}$, определеного в условии Теоремы 11.

Переобозначим многообразие $N^{n-\frac{n-n_s}{16}}$ через $N^{n-\frac{n-n_s}{16}}_{[2]}$. Рассмотрим подмногообразие
$$N^{n-\frac{n-n_s}{4}}_{\eta,[2]} \subset N^{n-\frac{n-n_s}{16}}_{[2]}, \qquad (92)$$

двойственное в смысле Пуанкаре когомологическому классу $\eta_N^{\frac{3(n-n_s)}{32}}$, $\eta_N \in H^2(N_{[2]}^{n-\frac{n-n_s}{16}};\mathbb{Z}/2)$. Определено погружение

$$g_{N_{\eta,[2]}} : N_{\eta,[2]}^{n-\frac{n-n_s}{4}} \looparrowright \mathbb{R}^n, \tag{93}$$

как ограничение погружения g_1 на подмногообразие (92).

Многообразие $N_{[3]}^{n-\frac{n-n_s}{8}}$, определенное в (90) является многообразием самопересечения погружения g_1. Подмногообразие $N_{\eta,[3]}^{n-\frac{n-n_s}{2}}$, определенное в (90), является многообразием самопересечения погружения (93).

Применим Лемму 22 к гомологическому классу

$$\eta_{d\times\dot{d},N_{\eta,[2]}} : N_{\eta,[2]} \to X_{d\times\dot{d}} \subset K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1) \tag{94}$$

и вычислим класс гомологий (91). Класс гомологий (91) удовлетворяет условиям Леммы 24, быть может, с точностью до прибавления четного гомологического класса. Поскольку классы гомологий (85), (89) лежат в группе, в которой четный элемент равен нулю, не ограничивая общности, можно предположить, что гомологический класс (94) определяется линейной комбинацией стандартных образующих, описанных в Лемме 24. Лемма 23 доказана.

7 Доказательство Теорем 17 и 18

Построения в этом разделе аналогичны построениям раздела 6. Начнем доказательство со следующей конструкции. Определим число n_s из условия Теоремы 6.

Рассмотрим многообразие $YY = S^{n-\frac{n-n_s}{4}+5}/\mathbf{Q}_a \times S^{n-\frac{n-n_s}{4}+5}/\mathbf{i}$. Это многообразие является прямым произведением однородного кватернионного и линзового пространств. Заметим, что $\dim(YY) > n$. Выберем внутри многообразия YY подмногообразие Y с особенностями в коразмерности 4, такое, что многообразие Y вкладывается в $\mathbb{R}^n$. В частности, $\dim(Y) < n$.

Рассмотрим в многообразии YY семейство подмногообразий

$$Y_j, \quad j = 0, \ldots, j_{max}, \qquad j_{max} = \frac{3n + n_s + 24}{16}$$

размерности $(n - \frac{n-n_s}{4} + 8)$ и коразмерности $(n - \frac{n-n_s}{4} + 2)$, определенное по формуле

$$Y_0 = S^{n-\frac{n-n_s}{4}+5}/\mathbf{Q}_a \times S^3/\mathbf{i}, \quad Z_1 = S^{n-\frac{n-n_s}{4}+1}/\mathbf{Q}_a \times S^7/\mathbf{i}, \quad \ldots,$$

$$Y_j = S^{n-\frac{n-n_s}{4}+5-4j}/\mathbf{Q}_a \times S^{4j+3}/\mathbf{i}, \quad \dots, \quad Y_{j_{max}} = S^3/\mathbf{Q}_a \times S^{n-\frac{n-n_s}{4}+3}/\mathbf{i}.$$

Вложение соответствующего подмногообразия семейства в многообразие YY определено как прямое произведение стандартных вложений.

Объединение $\cup_{j=0}^{j_{max}} Y_j$ семейства подмногообразий $\{Y_j\}$ многообразия YY является полиэдром (стратифицированным подмногообразием с особенностями в коразмерности 4) размерности $n - \frac{n-n_s}{4} + 8$, которое обозначим $Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \subset YY$.

Рассмотрим подгруппу

$$\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a \stackrel{i_{a\times \dot{a},\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}{\longrightarrow} \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, \qquad (95)$$

которая индуцирует 2-листное накрытие:

$$XX \stackrel{p_{XX,YY}}{\longrightarrow} YY. \qquad (96)$$

Определим накрытие

$$X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \stackrel{p_{Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}}{\longrightarrow} Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}. \qquad (97)$$

Это накрытие индуцировано подгруппой (95) при помощи вложения $Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \subset YY$. Таким образом, накрывающее пространство $X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}$ в накрытии (97) также является стратифицированным многообразием с особенностями в коразмерности 4. Это пространство определено явным образом как объединение семейства подмногообразий в $XX = S^{n-\frac{n-n_s}{4}+5}/\mathbf{i} \times S^{n-\frac{n-n_s}{4}+5}/\mathbf{i}$, определенных по формуле:

$$X_0 = S^{n-\frac{n-n_s}{4}+5}/\mathbf{i} \times S^3/\mathbf{i}, \quad \dots, \quad X_j = S^{n-\frac{n-n_s}{4}+5-4j}/\mathbf{i} \times S^{4j+3}/\mathbf{i}, \dots$$

$$X_{j_{max}} = S^3/\mathbf{i} \times S^{n-\frac{n-n_s}{4}+5}/\mathbf{i}.$$

Рассмотрим многообразие $ZZ = S^{n-\frac{n-n_s}{2}+5}/\mathbf{Q}_a \times S^{n-\frac{n-n_s}{2}+5}/\mathbf{Q}_a$. Это многообразие является прямым произведением двух однородных кватернионных пространств. Заметим, что $\dim(ZZ) > n$. Выберем внутри многообразия ZZ подмногообразие Z с особенностями в коразмерности 4, такое, что многообразие Z вкладывается в $\mathbb{R}^n$. В частности, $\dim(Z) < n$.

Рассмотрим в многообразии ZZ семейство подмногообразий

$$Z_j, \quad j = 0, \dots, j'_{max}, \qquad j'_{max} = \frac{n+n_s+6}{2}$$

размерности $(n - \frac{n-n_s}{2} + 8)$ и коразмерности $(n - \frac{n-n_s}{2} + 2)$, определенное по формуле

$$Z_0 = S^{n-\frac{n-n_s}{2}+5}/\mathbf{Q}_a \times S^3/\mathbf{Q}_a, \quad Z_1 = S^{n-\frac{n-n_s}{2}+1}/\mathbf{Q}_a \times S^7/\mathbf{Q}_a, \quad \dots,$$

$$Z_j = S^{n-\frac{n-n_s}{2}+5-4j}/\mathbf{Q}_a \times S^{4j+3}/\mathbf{Q}_a, \quad \dots, \quad Z_{j'_{max}} = S^3/\mathbf{Q}_a \times S^{n-\frac{n-n_s}{2}+3}/\mathbf{Q}_a.$$

Вложение соответствующего подмногообразия семейства в многообразие ZZ определено как прямое произведение стандартных вложений.

Объединение $\cup_{j=0}^{j'_{max}} Z_j$ семейства подмногообразий $\{Z_j\}$ многообразия ZZ является полиэдром (стратифицированным подмногообразием с особенностями в коразмерности 4) размерности $n - \frac{n-n_s}{4} + 8$, которое обозначим $Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a} \subset ZZ$.

Рассмотрим подгруппу

$$\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a \stackrel{i_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a}}{\longrightarrow} \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, \qquad (98)$$

которая индуцирует 2-листное накрытие:

$$YY' \stackrel{p'_{YY',ZZ}}{\longrightarrow} ZZ. \qquad (99)$$

Определим накрытие

$$Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \stackrel{p_{Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a}}}{\longrightarrow} Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a}. \qquad (100)$$

Это накрытие индуцировано подгруппой (98) при помощи вложения $Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \subset ZZ$. Таким образом, накрывающее пространство $Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}$ в накрытии (100) также является стратифицированным многообразием с особенностями в коразмерности 4. Это пространство определено явным образом как объединение семейства подмногообразий в $YY' = S^{n-\frac{n-n_s}{2}+5}/\mathbf{Q}_a \times S^{n-\frac{n-n_s}{2}+5}/\mathbf{i}$, определенных по формуле:

$$Y'_0 = S^{n-\frac{n-n_s}{2}+5}/\mathbf{Q}_a \times S^3/\mathbf{i}, \quad \dots, \quad Y'_j = S^{n-\frac{n-n_s}{2}+5-4j}/\mathbf{Q}_a \times S^{4j+3}/\mathbf{i}, \dots$$

$$Y'_{j_{max}} = S^3/\mathbf{Q}_a \times S^{n-\frac{n-n_s}{2}+5}/\mathbf{i}.$$

Определены отображения $\eta_X : X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$, $\eta_Y : Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$, $\eta_{Y'} : Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$, $\eta_Z : Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, 1)$, согласованные с включениями подгрупп (98),(95) и накрытиями (97),(100). Отображение η_X представлено прямым произведением отображений $\eta_{X,a} \times \eta_{X,\dot{a}} : X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to K(\mathbf{I}_a, 1) \times K(\dot{\mathbf{I}}_a, 1)$. Отображение η_Y представлено прямым произведением отображений $\eta_{Y,\mathbf{Q}_a} \times \eta_{Y,\dot{a}} : Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to K(\mathbf{Q}_a, 1) \times K(\dot{\mathbf{I}}_a, 1)$. Отображение $\eta_{Y'}$ представлено прямым произведением отображений $\eta_{Y',\mathbf{Q}_a} \times \eta_{Y',\dot{a}} : Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to K(\mathbf{Q}_a, 1) \times K(\dot{\mathbf{I}}_a, 1)$. Отображение ζ_Z представлено прямым произведением отображений $\zeta_{Z,\mathbf{Q}_a} \times \zeta_{Z,\dot{\mathbf{Q}}_a} : Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a} \to K(\mathbf{Q}_a, 1) \times K(\dot{\mathbf{Q}}_a, 1)$.

Определим многообразие с особенностями $J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}$. Для произвольного $j=0,\dots,j_{max}$ определим пространство $J_{\mathbf{Q}_a,j}$ как джойн $\frac{3n+n_s-16j+24}{16}$ копий кватернионного однородного пространства $S^3/\mathbf{Q}_a$. При тех же значениях j определим пространство $J_{\dot{\mathbf{I}}_a,j}=S^{4j+3}$, диффеоморфное стандартной $4j+3$–мерной сфере, которое удобно себе представлять как пространство джойна $j+1$ экземпляров стандартной сферы S^3. Пространство $J_{\mathbf{Q}_a,j}\times J_{\dot{\mathbf{I}}_a,j}$ переобозначим для краткости через $J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,j}$.

Определено стандартное включение $i_{J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,j}} : J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,j}\subset J_{\mathbf{Q}_a,0}\times J_{\dot{\mathbf{I}}_a,j_{max}}$, где сомножитель $J_{\mathbf{Q}_a,j}$ ($J_{\dot{\mathbf{I}}_a,j}$) включается в джойн-образ как стандартный подджойн, построенный для соответствующего числа однородных кватернионных пространств (трехмерных сфер) при стандартной нумерации. Объединение $\cup_{j=0}^{j_{max}}Im(i_{J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,j}})$ образов всех этих вложений является искомым пространством, которое обозначим через $J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}$, $J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}\subset J_{\mathbf{Q}_a,j}\times J_{\dot{\mathbf{I}}_a,j}$.

Определим многообразие с особенностями $J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a}$. Для произвольного $j=0,\dots,j'_{max}$ определим пространство $J'_{\mathbf{Q}_a,j}$ как джойн $\frac{n+n_s-8j+12}{8}$ копий кватернионного однородного пространства $S^3/\mathbf{Q}_a$. При тех же значениях j определим пространство $J'_{\dot{\mathbf{Q}}_a,j}$, диффеоморфное пространству джойна $j+1$ экземпляра кватернионного однородного пространства $S^3/\mathbf{Q}_a$. Пространство $J'_{\mathbf{Q}_a,j}\times J'_{\dot{\mathbf{Q}}_a,j}$ переобозначим для краткости через $J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a,j}$.

Определено стандартное включение $i_{J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a,j}} : J_{\mathbf{Q}_a\times\mathbf{Q}_a,j}\subset J'_{\mathbf{Q}_a,0}\times J'_{\dot{\mathbf{Q}}_a,j'_{max}}$, где сомножители $J'_{\mathbf{Q}_a,j}$, $J'_{\dot{\mathbf{Q}}_a,j}$ включаются в джойн-образ как стандартные подджойны, построенные для соответствующего числа однородных кватернионных пространств при стандартной нумерации. Объединение $\cup_{j=0}^{j'_{max}}Im(i_{J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a,j}})$ образов всех этих вложений является искомым пространством, которое обозначим через $J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a}$, $J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a}\subset J'_{\mathbf{Q}_a,0}\times J'_{\dot{\mathbf{Q}}_a,j'_{max}}$.

Определим разветвленное накрытие

$$\varphi_Y : Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}\to J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}. \tag{101}$$

Для каждого $j=0,\dots,j_{max}$ определим отображение

$$\varphi_{Y,j} : Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,j}\to J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,j}. \tag{102}$$

Определено стандартное разветвленное накрытие (см. [A], глава 3, Определение отображения c):

$$p_{Y_{\mathbf{Q}_a,j},1} : S^{n-\frac{n-n_s}{4}-4j+5}/\mathbf{Q}_a\to J_{\mathbf{Q}_a,j}, \tag{103}$$

Определено стандартное разветвленное накрытие (см. [A], глава 3, Определение отображения d):

$$p_{Y_{\dot{\mathbf{I}}_{a},j},1} : S^{4j+3}/\mathbf{i} \to J_{\dot{\mathbf{I}}_{a},j}, \tag{104}$$

Отображение (102) определено как декартово произведение описанных выше разветвленных накрытий (103), (104) по первому сомножителю и по второму сомножителю:

$$\varphi_{Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_{a,j}}} = p_{Y_{\mathbf{Q}_a,j},1} \times p_{Y_{\dot{\mathbf{I}}_{a},j},2} : S^{n-\frac{n-n_s}{4}-4j+5}/\mathbf{i} \times S^{4j+3}/\mathbf{i} \to$$

$$J_{\mathbf{Q}_a,j} \times J_{\dot{\mathbf{I}}_{a},j} = J_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_{a},j}.$$

Определено разветвленное накрытие (101) в результате склейки разветвленных накрытий $\varphi_{Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_{a,j}}}$ по подпространствам попарных пересечений семейства подмногообразий $Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_{a},j}$ в многообразии YY.

Определим разветвленное накрытие

$$\varphi_Z : Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a} \to J_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a}. \tag{105}$$

Для каждого $j = 0, \dots, j'_{max}$ определим отображение

$$\varphi_{Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_{a,j}}} : Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_{a},j} \to J_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_{a},j}. \tag{106}$$

Определены стандартные разветвленные накрытия (см. [A], глава 3, Определение отображения c):

$$p_{Z_{\mathbf{Q}_a,j},1} : S^{n-\frac{n-n_s}{2}-4j+5}/\mathbf{Q}_a \to J_{\mathbf{Q}_a,j}, \tag{107}$$

$$p_{Z_{\dot{\mathbf{Q}}_a,j},1} : S^{4j+3}/\mathbf{Q}_a \to J_{\dot{\mathbf{Q}}_a,j}. \tag{108}$$

Отображение (106) определено как декартово произведение описанных выше разветвленных накрытий (107), (108) по первому сомножителю и по второму сомножителю:

$$\varphi_{Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a},j} = p_{Z_{\mathbf{Q}_a,j},1} \times p_{Z_{\dot{\mathbf{Q}}_a,j},2} : S^{n-\frac{n-n_s}{2}-4j+5}/\mathbf{Q}_a \times S^{4j+3}/\mathbf{Q}_a \to$$

$$J_{\mathbf{Q}_a,j} \times J_{\dot{\mathbf{Q}}_a,j} = J_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a,j}.$$

Определено разветвленное накрытие (105) в результате склейки разветвленных накрытий $\varphi_{Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_{a,j}}}$ по подпространствам попарных пересечений семейства подмногообразий $Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_{a},j}$ в многообразии ZZ.

Определим вложение $i_{J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}} : J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \subset \mathbb{R}^n$. Это вложение строится в результате склейки семейства стандартных вложений пространств $J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,j}$, $0 \le j \le j_{max}$ в семейство $j_{max}+1$ евклидовых подпространств в $\mathbb{R}^n$ размерности $\frac{5(3n+n_s+24)}{16}+3$, проходящих через начало координат. Здесь мы воспользовались неравенством $n > 5n_s + 168$, которое выполнено по условию Теоремы 17. При указанном неравенстве размерность евклидовых пространств рассматриваемого семейства меньше n.

Подпространство с номером j семейства содержит пару пространств дополнительных размерностей: $\mathbb{R}^{\frac{5(3n+n_s+24)}{16}-5j-1}$, $\mathbb{R}^{5j+4}$, пересекающихся в начале координат. Пара подпространств с соседними номерами пересекаются по подпространству коразмерности 4. Пересечение в пространстве с меньшим (большим) соседним номером теряет коразмерность 4 вдоль первого (второго) подпространства выбранной пары. Внутри пространства с номером j семейства рассматривается декартово произведение вложений

$$i_{J_{\mathbf{Q}_a,j}} : J_{\mathbf{Q}_a,j} \subset \mathbb{R}^{\frac{5(3n+n_s+24)}{16}-5j-1}, \qquad (109)$$

$$i_{J_{\dot{\mathbf{I}}_a,j}} : J_{\dot{\mathbf{I}}_a,j} \subset \mathbb{R}^{5j+4}. \qquad (110)$$

Вложение (109) определено как джойн $\frac{3n+n_s+24-16j}{16}$ копий вложений Масси $S^3/\mathbf{Q}_a \subset \mathbb{R}^4$ (см. [A], раздел 3, Определение отображения c). Вложение (110) определено как стандартное вложение $(4j+3)$–мерной сферы в евклидово пространство. Объединяя семейство построенных вложенний, получим вложение $i_{J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}} : J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \subset \mathbb{R}^n$.

Определим вложение $i_{J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a}} : J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a} \subset \mathbb{R}^n$. Это вложение строится в результате склейки семейства стандартных вложений пространств $J_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{Q}}_a,j}$, $0 \le j \le j'_{max}$ в семейство $j'_{max}+1$ евклидовых подпространств в $\mathbb{R}^n$ размерности $\frac{5(n+n_s+12)}{8}+3$, проходящих через начало координат. Здесь мы воспользовались неравенством $n > \frac{5n_s+84}{3}$, которое выполнено по условию Теоремы 18. При указанном неравенстве размерность евклидовых пространств рассматриваемого семейства меньше n.

Подпространство с номером j семейства содержит пару пространств дополнительных размерностей $\mathbb{R}^{\frac{5(n+n_s+12)}{8}-5j-1}$, $\mathbb{R}^{5j+4}$, пересекающихся в начале координат. Пара подпространств с соседними номерами пересекаются по подпространству коразмерности 4. Пересечение в пространстве с меньшим (большим) соседним номером теряет коразмерность 4 вдоль первого (второго) подпространства выбранной пары. Внутри пространства с номером j семейства рассматривается декартово произведение вложений

$$i_{J'_{\mathbf{Q}_a,j}} : J'_{\mathbf{Q}_a,j} \subset \mathbb{R}^{\frac{5(n+n_s+12)}{8}-5j-1}, \qquad (111)$$

$$i_{J'_{\dot{\mathbf{Q}}_a,j}} : J'_{\dot{\mathbf{Q}}_a,j} \subset \mathbb{R}^{5j+4}. \qquad (112)$$

Вложение (111) определено как джойн $\frac{n+n_s+12-16j}{8}$ копий вложений Масси $S^3/\mathbf{Q}_a \subset \mathbb{R}^4$ (см. [A], раздел 3, Определение отображения c). Вложение (112) определено как джойн $j+1$ копии вложения Масси $S^3/\mathbf{Q}_a \subset \mathbb{R}^4$. Объединяя семейство построенных вложенний, получим вложение $i_{J_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a}} : J_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a} \subset \mathbb{R}^n$.

Конструкция отображения $c_{Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to \mathbb{R}^n$

Сначала определим вспомогательное отображение $\hat{d}_{Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a}} : Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a} \to \mathbb{R}^n$. Это отображение определено в результате малой регулярной PL–деформации композиции $i_{J_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a}} \circ \varphi_{Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a}} : Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a} \to \mathbb{R}^n$, причем сама деформация и ее калибр ε выбираются в процессе доказательства (см. аналогичное построение в [A], Лемма 25). Рассмотрим композицию $\hat{d}_{Z_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a}} \circ p_{Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to \mathbb{R}^n$ и определим искомое отображение $c_{Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to \mathbb{R}^n$ в результате малой регулярной PL–деформации этой композиции калибра ε', причем $\varepsilon' << \varepsilon$.

Конструкция отображения $c_{X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to \mathbb{R}^n$

Определим вспомогательное отображение $\hat{d}_Y : Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to \mathbb{R}^n$. Это отображение определено в результате малой регулярной PL–деформации композиции $i_{J_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} \circ \varphi_{Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to \mathbb{R}^n$, причем сама деформация и ее калибр ε выбираются в процессе доказательства (см. аналогичное построение в [A], Лемма 25). Рассмотрим композицию $\hat{d}_{Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} \circ \varphi_{X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to \mathbb{R}^n$ и определим искомое отображение $d_{X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to \mathbb{R}^n$ в результате малой регулярной PL–деформации этой композиции калибра ε', причем $\varepsilon' << \varepsilon$.

$\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–структура для отображения $c_{X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to \mathbb{R}^n$

Рассмотрим полиэдр самопересечения отображения $\hat{c}_{Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to \mathbb{R}^n$ и обозначим его через $\hat{N}(d_{Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}})$. Полиэдр $\hat{N}(d_{Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}})$ является многообразием с особенностями (в коразмерности 4) с краем, этот край обозначим через $\partial\hat{N}(d_{Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})$.

Рассмотрим полиэдр самопересечения отображения $c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}} : X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \to \mathbb{R}^n$ и обозначим его через $N(c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})$. Полиэдр $N(c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})$ является многообразием с особенностями (в коразмерности 4) с краем, этот край обозначим через $\partial N(c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})$. Многообразие с особенностями с краем $N(c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})$ представляется в объединение двух многообразий с особенностями с краем $N(c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}) = N_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a},antigiag} \cup N_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a},\Gamma}$ по общему краю, таким образом, что:

1. Многообразие с особенностями с краем $N_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,\Gamma}}$ является накрывающим пространством при регулярном 4-листном накрытии $p_{N_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,\Gamma}}} : N_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,\Gamma}} \to \hat{N}(c_{Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})$.

2. Многообразие с особенностями с краем $N_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a},antidiag}$ возникает при деформации двулистного накрытия $p_{Y_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}} : X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \to Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}$ внутри регулярной (погруженной) окрестности неособых точек полиэдра $\hat{c}_{Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}(Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a})$.

Рассмотрим полиэдр самопересечения отображения $c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}} : X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \to \mathbb{R}^n$ и обозначим его через $N(c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})$. Полиэдр $N(c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})$ является многообразием с особенностями (в коразмерности 2) с краем, этот край обозначим через $\partial N(c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})$. Многообразие с особенностями с краем $N(c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})$ представляется в объединение двух многообразий с особенностями с краем $N(c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}) = N_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,antigiag}} \cup N_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,\Gamma}}$ по общему краю, таким образом, что:

1. Многообразие с особенностями с краем $N_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a},\Gamma}$ является накрывающим пространством при регулярном 4-листном накрытии $p_{N_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a},\Gamma}} : N_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a},\Gamma} \to N(c_{Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})$.

2. Многообразие с особенностями с краем $N_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a},antidiag}$ возникает при деформации двулистного накрытия $p_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}$ внутри регулярной (погруженной) окрестности неособых точек полиэдра $c_{Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}(Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a})$.

Повторяя рассуждения из Леммы 25 [A], определим отображение

$$\zeta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,N(c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})} : (N(c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}), \partial N(c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})) \to$$

$$(K(\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a, 1), K(\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a, 1)). \qquad (113)$$

Это отображение определено в результате склейки характеристического отображения на $N_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a},antidiag}$ с предварительно построенным отображением на $N_{Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a},\Gamma}$, по антидиагональной части границы, где указанный отображения гомотопны. Граничные условия на $\partial N(c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})$

определяются композицией $\partial N(c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}) \subset X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \stackrel{\eta_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}}{\longrightarrow} K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$. Отображение (113) определяет $\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$ структуру для отображения $c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}$.

Бикватернионная структура для отображения $c_{Y'_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}} : Y'_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \to \mathbb{R}^n$

Аналогично предыдущему построению, определим многообразие с особенностями с краем $N(c_{Y'_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})$ и отображение

$$\zeta_{N(c_{Y'_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})} : (N(c_{Y'_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}), \partial N(c_{Y'_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}) \to$$

$$(K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, 1), K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)). \qquad (114)$$

Граничные условия на $\partial N(c_{Y'_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}})$ определяются композицией $\partial N(c_{Y'_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}) \subset Y'_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \stackrel{\eta_{Y'_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}}{\longrightarrow} K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$. Отображение (114) определяет $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$ структуру для отображения $c_{Y'_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}$.

Конструкция $\mathbb{Z}^{[4]}$–оснащенного погружения с $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–структурой в Теореме 17

Пусть задано $\mathbb{Z}^{[4]}$–оснащенное погружение (g, Ψ, η_N), $g : N^{n-\frac{n-n_s}{4}} \looparrowright \mathbb{R}^n$. По условию теоремы задано отображение $\eta_{a\times\dot{a},N} : N^{n-\frac{n-n_s}{4}} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$, при этом выполнено уравнение (42). Отображение $\eta_{a\times\dot{a},N}$ определяет однозначно (с точностью до гомотопии) отображение $\eta_{a\times\dot{a},X} : N^{n-\frac{n-n_s}{4}} \to X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}$, поскольку $X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}$ вкладывается в $K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$ как остов стандартного клеточного разбиения, который содержит меньший остов стандартного клеточного разбиения размерности $n - \frac{n-n_s}{4} + 1 = \dim(N) + 1$.

Рассмотрим композицию $c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}} \circ \eta_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}} : N^{n-\frac{n-n_s}{4}} \to \mathbb{R}^n$ и рассмотрим малую деформацию этого отображения в погружение g_1 в классе регулярной гомотопии данного погружения $g : N^{n-\frac{n-n_s}{4}} \looparrowright \mathbb{R}^n$. Калибр δ деформации $c_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}} \circ \eta_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}} \mapsto g_1$ выбирается много меньшим ε'. Погружение g_1 снабжено $\mathbb{Z}/2^{[2]}$–оснащением Ψ_1 с тем же характеристическим классом η_N, при этом тройка (g_1, Ψ_1, η_N) определяет в группе $Imm^{\mathbb{Z}^{[4]}}(n - \frac{n-n_s}{4}, \frac{n-n_s}{4})$ элемент y.

Обозначим через $L^{n-\frac{n-n_s}{2}}$ многообразие самопересечения погружения g_1. Определено разбиение

$$L^{n-\frac{n-n_s}{2}} = L_{cycl}^{n-\frac{n-n_s}{2}} \cup L_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}^{n-\frac{n-n_s}{2}} \tag{115}$$

по общей границе. При этом многообразие $L_{cycl}^{n-\frac{n-n_s}{2}}$ погружено в регулярную (погруженную) окрестность полиэдра $N(c_{X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}})$. Многообразие $L_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}^{n-\frac{n-n_s}{2}}$ погружено в регулярную (погруженную) некритических точек полиэдра $d_{X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}}(X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a})$ так, что определено отображение

$$\pi_{L_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : L_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}^{n-\frac{n-n_s}{2}} \to X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \tag{116}$$

проекции этой части многообразия (115) на центральный полиэдр в рассматриваемой окрестности. Общая граница этих многообразий погружена в регулярную (погруженную) окрестность критических значений отображения $c_{X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to \mathbb{R}^n$ (см. аналогичное Предложение 21 из [A]).

Определим искомое отображение

$$\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, L} : L^{n-\frac{n-n_s}{2}} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a), 1). \tag{117}$$

Отображение $\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, L}$ зададим отдельно на компонентах разбиения (115). На компоненте $L_{cycl}^{n-\frac{n-n_s}{2}}$ отображение $\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, L}$ определено отображением (113), которое продолжается на всю погруженную регулярную окрестность многообразия с особенностями $N(c_{X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}})$ вне критических значений. На компоненте $L_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}^{n-\frac{n-n_s}{2}}$ отображение $\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, L}$ определено композицией

$$L_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}^{n-\frac{n-n_s}{2}} \stackrel{\pi_{X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}}}{\longrightarrow} X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \stackrel{\eta_{X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}}}{\longrightarrow} K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1) \stackrel{i_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}}{\longrightarrow} K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1).$$

На общей границе указанные отображения можно склеить, что следует из выполнения граничных условий для отображения (113). Отображение (117), определяющее $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a$–структуру $\mathbb{Z}^{[4]}$–оснащенного погружения (g_1, Ψ_1, η_N) определено.

Конструкция $\mathbb{Z}/2^{[5]}$–оснащенного погружения с бикватернионной структурой в Теореме 18

Пусть задано $\mathbb{Z}/2^{[5]}$–оснащенное погружение (g, Ψ, η_N), $g : N^{n-\frac{n-n_s}{2}} \looparrowright \mathbb{R}^n$, определяющее элемент $y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(n - \frac{n-n_s}{2}, \frac{n-n_s}{2})$. По условию теоремы задано отображение $\eta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} : N^{n-\frac{n-n_s}{2}} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$, при этом выполнено уравнение (43). Отображение $\eta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, N}$ определяет однозначно (с точностью до гомотопии) отображение $\eta_{Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : N^{n-\frac{n-n_s}{2}} \to Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}$, поскольку $Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}$ вкладывается в $K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$ как остов стандартного клеточного разбиения, который заведомо содержит меньший остов стандартного клеточного разбиения размерности $n - \frac{n-n_s}{2} + 1 = \dim(N) + 1$.

Рассмотрим композицию $c_{Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} \circ \eta_{Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : N^{n-\frac{n-n_s}{2}} \to \mathbb{R}^n$ и рассмотрим малую деформацию этого отображения в погружение g_1 в классе регулярной гомотопии данного погружения $g : N^{n-\frac{n-n_s}{2}} \looparrowright \mathbb{R}^n$. Калибр δ деформации $d_{Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} \circ \eta_{Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} \mapsto g_1$ выбирается много меньшим ε'. Погружение g_1 снабжено $\mathbb{Z}/3^{[5]}$–оснащением Ψ_1 с тем же характеристическим классом η_N, при этом тройка (g_1, Ψ_1, η_N) определяет в группе $Imm^{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(n - \frac{n-n_s}{2}, \frac{n-n_s}{2})$ элемент y.

Обозначим через L^{n_s} многообразие самопересечения погружения g_1. Определено разбиение

$$L^{n_s} = L^{n_s}_{cycl} \cup L^{n_s}_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \tag{118}$$

по общей границе. При этом многообразие $L^{n_s}_{cycl}$ погружено в регулярную (погруженную) окрестность полиэдра $N(d_{Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}})$. Многообразие $L^{n_s}_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}$ погружено в регулярную (погруженную) регулярных точек полиэдра $c_{Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}}(Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a})$ так, что определено отображение

$$\pi_{L_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : L^{n_s}_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \tag{119}$$

проекции этой части многообразия (118) на центральный полиэдр в рассматриваемой окрестности. Общая граница этих многообразий погружена в регулярную (погруженную) окрестность критических значений отображения $c_{Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to \mathbb{R}^n$ (см. аналогичное Предложение 21 из [A]).

Определим искомое отображение

$$\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, L} : L^{n_s} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, 1). \tag{120}$$

Отображение $\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a}$ зададим отдельно на компонентах разбиения (118). На компоненте $L^{n_s}_{cycl}$ отображение $\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, L}$ определено отображением (114), которое продолжается на всю регулярную окрестность многообразия с особенностями $N(d_{Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}})$. На компоненте $L^{n_s}_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}$ отображение $\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, L}$ определено композицией

$$L^{n_s}_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \stackrel{\pi_{L_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}}}{\longrightarrow} Y'_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \stackrel{\eta_{Y_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}}}{\longrightarrow} K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1) \stackrel{i_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, \mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a}}{\longrightarrow} K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, 1).$$

На общей границе указанные отображения можно склеить, что следует из выполнения граничных условий для отображения (114). Отображение (120), определяющее $\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a$–структуру $\mathbb{Z}/2^{[5]}$–оснащенного погружения (g_1, Ψ_1, η_N) определено.

Проверка уравнения (42)

Рассмотрим $\mathbb{Z}/4^{[4]}$–оснащенное погружение (g_1, Ψ_1, η_N), построенное выше. Это погружение определяет то же элемент $y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[4]}}(n - \frac{n-n_s}{4}, \frac{n-n_s}{4})$. По условию многообразие $N^{n-\frac{n-n_s}{4}}$ снабжено отображением $\eta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, N} : N^{n-\frac{n-n_s}{4}} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$. Рассмотрим многообразие $L^{n-\frac{n-n_s}{2}}$ самопересечения погружения g_1, снабженное отображением (117).

Определим подмногообразие

$$N_\eta^{n-\frac{n-n_s}{2}} \subset N^{n-\frac{n-n_s}{4}}, \qquad (121)$$

двойственное в смысле Пуанкаре коциклу $\eta_{[4]}^{\frac{n-n_s}{32}} \in H^{\frac{n-n_s}{4}}(N^{n-\frac{n-n_s}{4}}; \mathbb{Z}/2)$. Рассмотрим погружение (общего положения) $g_{N_\eta} : N_\eta^{n-\frac{n-n_s}{2}} \looparrowright \mathbb{R}^n$, определенное как ограничение погружения g_1 на подмногообразие (121). Обозначим через $L_\eta^{n_s}$ многообразие самопересечения погружения g_{N_η}. Определено вложение подмногообразий

$$L_\eta^{n_s} \subset L^{n-\frac{n-n_s}{2}}. \qquad (122)$$

Определено отображение

$$\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, L_\eta} : L_\eta^{n_s} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$$

как ограничение отображения (117) на подмногообразие (122). Заметим, что подмногообразие (122) представляет гомологический класс, двойственный в смысле Пуанкаре коциклу $\zeta^{\frac{n-n_s)}{32}} \in H^{\frac{n-n_s}{2}}(L^{n-\frac{n-n_s}{2}}; \mathbb{Z}/2)$.

Поэтому уравнение (40) эквивалентно следующему:

$$\Theta_{\mathbb{Z}/2^{[2]}}^{\frac{n-n_s}{32}}(y) = \langle \bar{\zeta}_{d \times \dot{d}, L_\eta}^{\frac{n_s}{2}}; [\bar{L}_{d \times \dot{d}, \eta}] \rangle. \qquad (123)$$

Каноническое 2-листное накрывающее $\bar{L}_{\eta, d \times \dot{d}}^{n_s}$ над многообразием (122) естественно погружено в исходное многообразие $N^{n-\frac{n-n_s}{4}}$ и его фундаментальный цикл представляет (по Теореме Герберта) гомологический класс, двойственный в смысле Пуанкаре коциклу

$\eta^{\frac{n-n_s}{32}} \in H^{\frac{3(n-n_s)}{4}}(N^{n-\frac{n-n_s}{4}};\mathbb{Z}/2)$. Уравнение равнение (42) эквивалентно следующему:

$$\Theta_{\mathbb{Z}/2^{[2]}}^{\frac{n-n_s}{32}}(y) = \langle \eta_{d\times\dot{d},N_\eta}^{\frac{n_s}{2}};[\bar{N}_{\eta,d\times\dot{d}}]\rangle, \qquad (124)$$

где отображение $\eta_{d\times\dot{d},N_\eta}: \bar{N}^{n_s}_{\eta,d\times\dot{d}} \to K(\mathbf{I}_d\times\dot{\mathbf{I}}_d,1)$ определено в результате накрытия над ограничением отображения $\eta_{d\times\dot{d},N}$ на подмногообразие (121).

Для доказательства теоремы осталось заметить, что правые части равенств (123) (124) равны. Это доказано в следующей лемме. Теорема 17 доказана.

Лемма 25. *Классы гомологий*

$$\bar{\zeta}_{d\times\dot{d},*}([\bar{L}_{d\times\dot{d},\eta}] \in H_{n_s}(K(\mathbf{I}_d\times\dot{\mathbf{I}}_d,1);\mathbb{Z}/2), \qquad (125)$$

$$\bar{\eta}_{d\times\dot{d},*}([\bar{N}_{d\times\dot{d},\eta}]) \in H_{n_s}(K(\mathbf{I}_d\times\dot{\mathbf{I}}_d,1);\mathbb{Z}/2), \qquad (126)$$

аналогичные гомологическим классам (73), (74), *равны.*

Переформулируем лемму и докажем более общее утверждение. Класс гомологий (126) можно обобщить и определить в более общей ситуации, без предположения о том, что многообразие $L_\eta^{n_s}$ является замкнутым.

Пусть определено замкнутое ориентированное многообразие R^{2r} с особенностями в коразмерности 4 размерности $\dim(R)=2r$, $2r=-2 \pmod 8$, $\frac{n}{2} \le 2r \le n-\frac{n-n_s}{4}$. Предположим, что задано отображение $\eta_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,R}: R^{2r} \to X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \xrightarrow{\eta_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}} K(\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,1)$.

Рассмотрим отображение $g_R : R^{2r} \to \mathbb{R}^n$ общего положения, которое определено в результате малой деформацией общего положения отображения $R^{2r} \xrightarrow{g_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,R}} X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \xrightarrow{d_{X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}} \mathbb{R}^n$. Определено ориентированное многообразие с особенностями T^{n-4r} самопересечния отображения g_R. Край ∂T^{n-4r} многообразия T^{n-4r} состоит из критических точек отображения g_R. Определено каноническое 2-листное накрытие $\bar{T}^{n-4r} \to T^{n-4r}$, разветвленное вдоль края. Определено отображение $\zeta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,T}: \bar{T}^{n-4r} \to K(\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,1)$ в результате композиции погружения $\bar{T}^{n-4r} \looparrowright R^{2r}$ с отображением $\eta_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,R}$.

Определен класс гомологий

$$\eta_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,T,*}([\bar{T}]) \in H_{n-4r}(K(\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,1);\mathbb{Z}/2), \qquad (127)$$

обобщающий класс гомологий (126). Класс гомологий (125) также можно обобщить на рассматриваемый случай.

Определено разбиение

$$T^{n-4r} = T^{n-4r}_{cycl} \cup T^{n-4r}_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}, \tag{128}$$

аналогичное разбиению (115).

Край ∂T^{n-4r} многообразия с особенностями T^{n-4r} целиком лежит в компоненте $T^{n-4r}_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}$ и проекция

$$\pi_{T_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}} : T^{n-4r}_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \to X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}, \tag{129}$$

аналогичная отображению (116), переводит край ∂T^{n-4r} в регулярную часть многообразия с особенностями $X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}$.

Определено отображение

$$\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, T} : (T^{n-4r}, \partial T^{n-4r}) \to (K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1), (K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)), \tag{130}$$

аналогичное отображению (117).

Поскольку коразмерность отображения g_R четна, и многообразие с особенностями R^{2r} является ориентированным, то и многообразие с особенностями с краем T^{n-4r} также является ориентированным. Следовательно относительный класс гомологий

$$\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, T,*} : ([T^{n-4r}, \partial T^{n-4r}]) \in H_{n-4r}(K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1), (K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)); \mathbb{Z}/2)$$

является приведением по модулю 2 соответствующего целочисленного класса из группы $H_{n-4r}(K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1), K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)); \mathbb{Z})$.

Ограничение отображения $\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, T}$ на край ∂T^{n-4r} принимает значения в подпространстве $K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1) \subset K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$. Образ фундаментального цикла $\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, T,*}([\partial T^{n-4r}])$ многообразия с особенностями, краем, определяет нулевой цикл в группе $H_{n_s-1}(K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1); \mathbb{Z}/2)$, поскольку лежит в образе нулевой группы $H_{n-4r-1}(K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1); \mathbb{Z})$ при гомоморфизме приведения по модулю 2 (см. аналогичное утверждение в Лемме 16 из [A]). Следовательно, класс гомологий

$$\bar{\zeta}_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, *}([\bar{T}_{d \times \dot{d}}] \in H_{n-4r}(K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1); \mathbb{Z}/2) \tag{131}$$

определен.

В частности, характеристические классы (127), (131) определены, если в качестве многообразия R^{2r} выбрать многообразие $R^{2r}_i =$

$S^{2r-8i+1}/\mathbf{i} \times S^{8i-1}/\mathbf{i}$, а в качестве отображения $\eta_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, R}$ выбрать произвольное стандартное отображение, определенное как декартово произведение покоординатных вложениий

$$\eta_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, R_i} : S^{2r-8i+1} \times \mathbb{RP}^{8i-1} \subset X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, j}$$

$$\stackrel{\varphi_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, j}}{\longrightarrow} X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a} \stackrel{\eta_{X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}}}{\longrightarrow} K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1), \qquad (132)$$

при произвольных значениях i, j, $0 \le 8i \le 2r+1$, $0 \le j \le j_{max}$.

Лемма 26. *Обозначим образ фундаментального класса* $\eta_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, R_i, *}([R_i]) \in H_{2r}(K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1); \mathbb{Z})$ *через* $(2r - 8i + 1 \times 8i - 1)$.

– 1. Для класса гомологий $(2r - 8i + 1 \times 8i - 1) \in H_{2r}(K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1); \mathbb{Z})$, *заданного отображением* (132), *класс гомологий* (127), *лежащий в той же группе, равен* $(4r - 16i + 2 - \frac{n}{2} \times 16i - 2 - \frac{n}{2})$, *если оба числа в скобках строго положительные, и равен нулю, если хотябы одно из чисел в скобках отрицательно.*

– 2. Характеристический класс (131), *обобщающий класс* (125) *для ориентированных многообразий с особенностями при* $2r = n - \frac{n+n_s}{2}$, *совпадает с классом* (127), *обобщающий характеристический класс* (126).

Доказательство Леммы 26

Утверждение 1 доказывается прямым вычислением, которое опускается. Утверждение 2 вытекает из построения отображения $d_{X_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a}}$, см. аналогичную формулу (20) в [A]. Лемма 26 доказана.

Доказательство Леммы 25

Рассмотрим пару многообразий, определенных формулой (121) и переобозначим эту пару многообразий через

$$N_{\eta,[4]}^{n-\frac{n-n_s}{2}} \subset N_{[4]}^{n-\frac{n-n_s}{4}}. \qquad (133)$$

Многообразие $N_{[4]}^{n-\frac{n-n_s}{4}}$ снабжено отображением

$$\eta_{\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, [4]} : N_{[4]}^{n-\frac{n-n_s}{4}} \to K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1). \qquad (134)$$

Многообразие $N_{[4]}^{n-\frac{n-n_s}{4}}$ с точностью до нормального кобордизма совпадает с многообразием $L^{n-\frac{n-n_s}{4}}$, которое является $\mathbb{Z}/2^{[4]}$–оснащенным многообразием самопересечения $\mathbb{Z}/2^{[3]}$–оснащенного погружения (g_1, Ψ_1, η_N) многообразия $N^{n-\frac{n-n_s}{8}}$, определеного в условии Теоремы 12.

Переобозначим многообразие $N^{n-\frac{n-n_s}{8}}$ через $N_{[3]}^{n-\frac{n-n_s}{8}}$. Рассмотрим подмногообразие

$$N_{\eta,[3]}^{n-\frac{n-n_s}{4}} \subset N_{[3]}^{n-\frac{n-n_s}{8}}, \qquad (135)$$

двойственное в смысле Пуанкаре когомологическому классу $\eta_N^{\frac{n-n_s}{16}}$, $\eta_N \in H^4(N_{[3]}^{n-\frac{n-n_s}{8}}; \mathbb{Z}/2)$. Определено погружение

$$g_{N_{\eta,[3]}} : N_{\eta,[3]}^{n-\frac{n-n_s}{4}} \looparrowright \mathbb{R}^n, \qquad (136)$$

как ограничение погружения g_1 на подмногообразие (135).

Многообразие $N_{[4]}^{n-\frac{n-n_s}{4}}$, определенное в (133) является многообразием самопересечения погружения g_1. Подмногообразие $N_{\eta,[4]}^{n-\frac{n-n_s}{2}}$, определенное в (133), является многообразием самопересечения погружения (136).

Применим Лемму 24 к гомологическому классу

$$\eta_{a\times\dot{d},N_{\eta,[3]}} : N_{\eta,[3]}^{n-\frac{n-n_s}{2}} \to X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_d} \subset K(\mathbf{I}_a \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1) \qquad (137)$$

и вычислим класс гомологий (134). Класс гомологий (134) удовлетворяет условиям Леммы 26, быть может, с точностью до прибавления четного гомологического класса. Поскольку классы гомологий (125), (126) лежат в группе, в которой четный элемент равен нулю, не ограничивая общности, можно предположить, что гомологический класс (149) определяется линейной комбинацией стандартных образующих, описанных в Лемме 26. Лемма 25 доказана.

Воспользуемся Леммой 25. Набор стандартных отображений (132) при $2r = n - \frac{n-n_s}{2}$ реализует все элементы в группе $H_{n-\frac{n-n_s}{2}}(X_{\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}; \mathbb{Z})$. Поскольку многообразие $N_\eta^{n-\frac{n-n_s}{2}}$ оказывается ориентированным, отображение $g_\eta : N_\eta^{n-\frac{n-n_s}{2}} \to \mathbb{R}^n$ кобордантно дизъюнктному набору стандартных отображений (132) в классе отображений ориентированных многообразий с особенностями в коразмерности 4. Характеристические классы отображения при кобордизме отображения сохраняются. Следовательно, характеристические числа (125) (126) равны. Лемма 25 доказана.

Проверка уравнения (43)

Рассмотрим $\mathbb{Z}/2^{[5]}$–оснащенное погружение (g_1, Ψ_1, η_N), построенное выше. Это погружение определяет элемент $y \in Imm^{\mathbb{Z}/2^{[5]}}(n - \frac{n-n_s}{2}, \frac{n-n_s}{2})$, тот же, что и исходное $\mathbb{Z}/2^{[5]}$–оснащенное погружение (g, Ψ, η_N).

Многообразие $N^{n-\frac{n-n_s}{2}}$ снабжено отображением $\eta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, N} : N^{n-\frac{n-n_s}{2}} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$. Рассмотрим многообразие L^{n_s} самопересечения погружения g_1, снабженное отображением (120).

Определим подмногообразие

$$N_\eta^{n_s} \subset N^{n-\frac{n-n_s}{2}}, \tag{138}$$

двойственное в смысле Пуанкаре коциклу $\eta^{\frac{n-n_s}{8}} \in H^{\frac{n-n_s}{2}}(N^{n-\frac{n-n_s}{2}}; \mathbb{Z}/2)$. Обозначим через

$$L_\eta^{n_s} \tag{139}$$

многообразие самопересечения погружения g_{N_η}. Определено отображение

$$\zeta_{\mathbf{Q}_a \times \mathbf{Q}_a, L_\eta} : L_\eta^{n_s} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{Q}}_a, 1)$$

как ограничение отображения (120) на подмногообразие (139).

Каноническое 2-листное накрывающее $\bar{L}_\eta^{n_s}$ над многообразием (139) естественно погружено в исходное многообразие $N^{n-\frac{n-n_s}{2}}$ и его фундаментальный цикл представляет (по Теореме Герберта) гомологический класс, двойственный в смысле Пуанкаре коциклу $\eta^{\frac{n-n_s}{32}} \in H^{\frac{n-n_s}{2}}(N^{n-\frac{n-n_s}{2}}; \mathbb{Z}/2)$. Уравнение (41) эквивалентно следующему:

$$\Theta_{\mathbb{Z}/2^{[5]}}^{\frac{n-n_s}{32}}(y) = \langle \bar{\zeta}_{d \times \dot{d}, L}^{\frac{n_s}{2}}; [\bar{L}_{d \times \dot{d}}] \rangle. \tag{140}$$

Уравнение (43) эквивалентно следующему:

$$\Theta_{\mathbb{Z}/2^{[5]}}^{\frac{n-n_s}{32}} = \langle \bar{\eta}_{d \times \dot{d}, N}^{\frac{n_s}{2}}; [\bar{N}_{d \times \dot{d}, \eta}] \rangle, \tag{141}$$

где многообразие $\bar{N}_{d \times \dot{d}, \eta}$ и отображение $\bar{\eta}_{d \times \dot{d}, N_\eta} : \bar{N}_{d \times \dot{d}, \eta} \to K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1)$ определены как 8-листное накрывающее над многообразием N^{n_s} и отображением $\eta_{\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, N_\eta} : N_\eta^{n_s} \to K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1)$.

Для доказательства теоремы осталось заметить, что правые части равенств (140) (141) равны. Это доказано в следующей Лемме. Теорема 18 доказана.

Лемма 27. *Классы гомологий*

$$\bar{\zeta}_{d\times\dot{d},L,*}([\bar{L}_{d\times\dot{d}}] \in H_{n_s}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z}/2), \qquad (142)$$

$$\bar{\eta}_{d\times\dot{d},*}([\bar{N}_{d\times\dot{d},\eta}]) \in H_{n_s}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z}/2) \qquad (143)$$

равны.

Потребуется лемма, аналогичная Лемме 22.

Определим характеристические классы, аналогичные (127), (131). Для заданного натурального r, $r = -2 \pmod{16}$ определим семейство ориентированных многообразий $R_i^{2r} = S^{2r-16i+1}/\mathbf{Q}_a \times S^{16i-1}/\mathbf{i}$, $0 \le i \le \frac{r-6}{8}$, $2r \le n - \frac{n-n_s}{2} = \dim(Y'_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}) - 8$. В качестве отображения $\eta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,R} : R^{2r} \to Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}$ выберем произвольное стандартное отображение, определенное как декартово произведение покоординатных вложениий

$$\eta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,R_i} : S^{2r-16i+1}/i \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{16i-1} \subset Y_j \xrightarrow{\varphi_{Y_j}}$$

$$Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \xrightarrow{\eta_{Y_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}}} K(\mathbf{Q}_a \times \dot{\mathbf{I}}_a, 1), \qquad (144)$$

при некоторых произвольных значениях i, j, $0 \le i \le \frac{r-6}{8}$, $0 \le j \le j'_{max}$.

Определено отображение $g_R : R^{2r} \to \mathbb{R}^n$, как результат деформации общего положения отображения $d_{Y'_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a}} \circ \eta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,R}$. Определено ориентированное многообразие с особенностями с краем T^{4r-n} размерности $\dim(T) = 4r - n$, как многообразие самопересечения отображения g_R. Многообразие с особенностями $\bar{T}^{4r-n}$ служит каноническим 2-листным разветвленным накрывающим над многообразием T^{4r-n}. Многообразие с особенностями $\bar{T}^{4r-n}$ погружено в многообразие R^{2r}, поэтому пределен класс гомологий

$$\bar{\zeta}_{d\times\dot{d},T,*}([\bar{T}_{d\times\dot{d}}] \in H_{4r-n}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z}/2), \qquad (145)$$

обобщающий класс гомологий (142).

Определен класс гомологий

$$\bar{\eta}_{d\times\dot{d},T,*}([\bar{T}_{d\times\dot{d}}]) \in H_{4r-n}(K(\mathbf{I}_d \times \dot{\mathbf{I}}_d, 1); \mathbb{Z}/2), \qquad (146)$$

обобщающий класс гомологий (143).

Лемма 28. *Обозначим образ фундаментального класса* $\eta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,R_i,*}([R_i]) \in H_{2r}(K(\mathbf{I}_a\times\dot{\mathbf{I}}_d,1);\mathbb{Z})$ *через* $(2r-16i+1\times 16i-1)$.

–1. Для класса гомологий $(2r-16i+1\times 16i-1)\in H_r(K(\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,1);\mathbb{Z})$, *заданного отображением* (144), *класс гомологий* (146), *лежащий в той же группе, равен* $(4r-32i+2-\frac{n}{2}\times 32i+2-\frac{n}{2})$, *если оба числа в скобках строго положительные, и равен нулю, если хотябы одно из чисел отрицательно.*

–2. Характеристический класс (145), *обобщающий класс* (142) *для ориентированных многообразий с особенностями при* $2r=n-\frac{n+n_s}{2}$, *совпадает с классом* (146), *обобщающий характеристический класс* (143).

Доказательство Леммы 28

Доказательство аналогично доказательству Лемм 23,24.

Доказательство Леммы 27

Рассмотрим многообразие (138) и переобозначим его через

$$N_{[5]}^{n-\frac{n-n_s}{2}}. \tag{147}$$

Многообразие (147) снабжено отображением

$$\eta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,[5]} : N_{[5]}^{n-\frac{n-n_s}{2}} \to K(\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,1). \tag{148}$$

Многообразие (147) с точностью до нормального кобордизма совпадает с многообразием $L^{n-\frac{n-n_s}{2}}$ из Теоремы 17, т.е. является $\mathbb{Z}/2^{[5]}$–оснащенным многообразием самопересечения $\mathbb{Z}/2^{[4]}$–оснащенного погружения (g_1,Ψ_1,η_N), где многообразие $N^{n-\frac{n-n_s}{4}}$ определено в условии Теоремы 17. Переобозначим многообразие $N^{n-\frac{n-n_s}{4}}$ через $N_{[4]}^{n-\frac{n-n_s}{4}}$.

Применим Лемму 28 к гомологическому классу

$$\eta_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,N_{[5]}} : N_{[5]}^{n-\frac{n-n_s}{2}} \to Y'_{\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a} \subset K(\mathbf{Q}_a\times\dot{\mathbf{I}}_a,1) \tag{149}$$

и вычислим класс гомологий (134). Класс гомологий (134) удовлетворяет условиям Леммы 24, быть может, с точностью до прибавления четного гомологического класса. Поскольку классы гомологий (145), (146) лежат в группе, в которой четный элемент равен нулю, не ограничивая общности, можно предположить, что гомологический класс (149) определяется линейной комбинацией стандартных образующих, описанных в Лемме 28. Лемма 27 доказана.

8 Теорема о ретракции

Мы докажем следующую теорему о ретракции, которая использовалась в формулировке Теоремы 6.

Теорема 29. *Теорема о ретракции. Для произвольного натурального d существует натуральное $l = l(d)$ такое, что произвольный элемент в группе кобордизма $Imm^{sf}(2^{l'} - 3, 1)$, при $l' \ge l$, допускает ретракцию порядка $d - 1$ (см. Определение 5).*

Замечание

Необходимое и достаточное условие существования ретракции переформулировано ниже в Следствии 34. Это позволяет переформулировать Теорему 29 без использования понятия ретракции в следующей форме. Для произвольного натурального d существует натуральное $l = l(d)$ такое, что при $l' \ge l$ гомоморфизм $J^d_{sf} : Imm^{sf}(2^{l'} - 3, 1) \to Imm^{sf}(d, 2^{l'} - 2 - d)$ равен нулю.

Пусть M^{n-k}–замкнутое $(n-k)$-мерное многообразие, погруженное в $\mathbb{R}^n$ с коразмерностью k со скошенным оснащением Ξ_M (характеристический класс этого скошенного оснащения обозначен через κ_M). Предположим, кроме того, что многообразие M^{n-k} снабжено семейством 1-когомологических классов $A_M = \{\kappa_M, \kappa_1, \dots, \kappa_j\}$, которые представлены отображениями κ_M, $\kappa_i : M^{n-k} \to \mathbb{RP}^\infty$, $i = 1, \dots, j$. Обозначим набор $\kappa_1, \dots, \kappa_j$ через A'_M.

Определение 30. Определим группу кобордизма $Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k;k)$. Представителем этой группы являются тройки (M^{n-k}, Ξ_M, A_M), где M^{n-k}–замкнутое $n-k$-мерное многообразие со скошенным оснащением, снабженное семейством 1-когомологических классов A_M. Отношение кобордизма является стандартным отношением эквивалентности на множестве представителей, которое сохраняет описанную дополнительную структуру.

В случае $j = 0$ группа совпадает с группой скошенно-оснащенных погруженных многообразий $Imm^{sf}(n-k, k)$. Если предположить, что $\kappa_M = 0$, причем аналогичное условие выполнено и для кобордизма, задающего отношение эквивалентности представителей, то получим группу оснащенных кобордизмов многообразий, снабженных семейством когомологических классов A'_M. Эта группа обозначается через $Imm^{fr;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k, k)$. По конструкции Понтрягина-Тома группа $Imm^{fr;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k, k)$ изоморфна прямой сумме $\Pi_{n-k}(\prod_j \mathbb{RP}^\infty) \times \Pi_{n-k}$, где первое слагаемое является стабильной гомотопической группой пространства $\prod_{i=1}^{i=j}\mathbb{R}\mathrm{P}_i^{\infty}$, а второе слагаемое является $(n-k)$-ой стабильной гомотопической группой сфер Π_{n-k}.

Определен естественный (тавталогический) гомоморфизм

$$\delta : Imm^{fr;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k,k) \to Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k,k), \qquad (150)$$

при этом когомологический класс κ_M набора A_M определяется нулевым.

Определен другой естественный гомоморфизм

$$J^k : Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-1,1) \to Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k,k), \qquad (151)$$

посредством перехода от тройки $(M_0^{n-1},\Xi_{M_0},A_{M_0})$, представляющей элемент в исходной группе $Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-1,1)$, к тройке (M^{n-k},Ξ_M,A_M), где подмногообразие $M^{n-k}\subset M_0^{n-1}$ двойственно в смысле Пуанкаре когомологическому классу $\kappa_{M_0}^{k-1}\in H^{k-1}(M_0;\mathbb{Z}/2)$, скошенное оснащение Ξ_M определяется стандартным способом, а набор когомологических классов A_M получен ограничением набора A_{M_0} на подмногообразие $M^{n-k}\subset M_0^{n-1}$.

Опишем гомоморфизм трансфера $r_j : Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k,k) \to Imm^{sf;\hat\kappa_1\dots,\hat\kappa_{j-1}}(n-k,k)$ относительно когомологического класса κ_j. Пусть $\alpha\in Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k,k)$ – произвольный элемент, представленный тройкой (M^{n-k},Ξ_M,A_M). Рассмотрим двулистное накрытие $p_j:\hat{M}_j^{n-k}\to M^{n-k}$, $p_j=\kappa_j+\kappa_M$. Ниже через p_j мы будем также обозначать линейное расслоение, соответствующее характеристическому классу p_j. Опишем скошенное оснащение $\Xi_{\hat{M}_j}$ над $\hat{M}_j$. Рассмотрим погружение $\varphi: M^{n-k}\looparrowright\mathbb{R}^n$ коразмерности k, класс регулярной гомотопии которого определен скошенным оснащением Ξ_M. Обозначим через ν_M нормальное расслоение к φ. Над двулистном накрывающем $\hat{M}_j$ определено нормальное расслоение $\nu_{\hat{M}_j}$ погружения φ, индуцированное из ν_M при проекции p_s. Определим скошенное оснащение $\hat{\Xi}$ нормального расслоения $\nu_{\hat{M}_j}$ как оснащение, индуцированное из скошенного оснащения Ξ на слои двулистного накрытия.

Многообразие $\hat{M}_j$ снабжено набором когомологических классов $A_{\hat{M}_j}=\{\kappa_{\hat{M}_j},\hat\kappa_1,\dots,\hat\kappa_{j-1}\}$, индуцированных из заданного набора когомологических классов с базы M^{n-k} при помощи накрытия p_j.

Построенное скошенно-оснащенное многообразие $\hat{M}_j$ с указанным набором классов когомологий представляет элемент в группе кобордизма $Imm^{sf;\kappa_1\dots,\kappa_{j-1}}(n-k,k)$, который определяет образ исходного элемента.

Пример 31. Предположим, что $j=0$. Тогда гомоморфизм трансфера $r_1 : Imm^{sf}(n-k,k) \to Imm^{fr}(n-k,k)$ изучен в [A-E].

Обозначим через

$$r_{j_1+1,\dots,j_2} : Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_{j_2}}(n-k,k) \to Imm^{sf;\hat{\kappa}_1,\dots,\hat{\kappa}_{j_1}}(n-k,k) \qquad (152)$$

композицию последовательных трансферов относительно набора когомологических классов $A_M = \{\kappa_{j_1}+1,\dots,\kappa_{j_2}\}$, $0 \le j_1 < j_2$. Более подробно, это означает, что первый гомоморфизм трансфера берем относительно класса $\kappa_{j_2} \in H^1(M^{n-k};\mathbb{Z}/2)$, далее второй – относительно класса $\hat{\kappa}_{j_2-1} \in H^1(\hat{M}^{n-k}_{j_2};\mathbb{Z}/2)$, который получен индуцированием κ_{j_2-1} на двулистное накрывающее $\hat{M}^{n-k}_{j_2}$ накрытия p_{j_2} и т.д. Нетрудно доказать, что результат применения гомоморфизма $r_{j_1+1,\dots,j_2}$ не зависит от способа упорядочивания когомологических классов внутри набора с индексами $j_1+1,\dots,j_2$. В случае $j_1=0$, гомоморфизм трансфера $r_{1,\dots,j_2}$ строится относительно набора когомологических классов A'_M. Назовем такой гомоморфизмом гомоморфизмом полного трансфера и обозначим его через r_{tot}. Гомоморфизм полного трансфера можно сразу определить при помощи перехода к 2^{j_2}–листному накрытию $\bar{M}^{n-k}_{tot} \to M^{n-k}$ со структурной группой $\mathbb{Z}/2^{j_2}$ при помощи гомоморфизма

$$\times_i(\kappa_N+\kappa_i) : H^1(M^{n-k};\mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2^{j_2}, \qquad 1 \le i \le j_2.$$

Накрывающее многообразие $\bar{M}^{n-k}_{tot}$ в этой конструкции можно определить как тотальное пространство $\mathbb{Z}^j$–накрытия при помощи другого упорядоченного набора характеристических классов. Поменяем местами класс κ_M с произвольным классом κ_i и определим накрытие, описанным выше способом. Результат не изменится. Это следует из того, что во-первых, результат применения трансфера не зависит от того, каким способом упорядочен набор классов когомологий, относительно которых строится трансфер. Во-вторых, на накрывающем пространстве $\bar{M}^{n-k}$ над M^{n-k} относительно когомологического класса $\kappa_i + \kappa_M$ индуцированные классы $\bar{\kappa}_i, \bar{\kappa}_M \in H^1(\bar{M}^{n-k};\mathbb{Z}/2)$ оказываются равными.

Предложение 32. *Для любого натурального четного числа k, $k = 0(mod 2)$, $2^l - 2 = n > k > 0$, существует такое натуральное число ψ, зависящее только от k, что гомоморфизм полного трансфера*

$$r_{tot} : Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_\psi}(n-k,k) \to Imm^{sf}(n-k,k) \qquad (153)$$

тривиальный.

Доказательство Предложения 32

Определим последовательность натуральных чисел $s_{n-k},\dots,s_1$, по убыванию индексов от $n-k$ до 1:

$$s_{n-k}=ord(\Pi_{n-k}),\quad s_{n-k-1}=ord\Pi_{n-k-1}),\quad \dots,\quad s_1=ord(\Pi_1).$$

Здесь через $ord(\Pi_i)$ обозначена степень числа 2, которая равна порядку 2-компоненты i-ой стабильной гомотопической группы сфер. Далее определим $\psi(i)=\sum_{j=i}^{n-k}s_j$ и, наконец, искомое число $\psi=\psi(1)+\sigma+1$, где $\sigma=ord(Imm^{fr;\kappa_1,\dots,\kappa_{\psi(1)}}(n-k,k))$. Таким образом $\psi>\psi(1)\ge\psi(2)\ge\dots\ge\psi(n-k)$.

Пусть задан элемент $\alpha\in Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_\psi}(n-k,k)$, представленный тройкой (M^{n-k},Ξ_M,A_M). Рассмотрим элемент $r_\psi(\alpha)$, представленный тройкой $(\hat{M}^{n-k},\Xi_{\hat{M}},A_{\hat{M}})$, полученный применением трансфера относительно классов когомологий с номерами $\psi(1)+1,\dots,\psi$. Докажем, что этот элемент допускает ретракцию порядка 0.

Рассмотрим произведение $\mathbb{RP}_0^\infty\times\prod_{i=1}^{i=\psi(j)}\mathbb{RP}^\infty(i)$, которое обозначим через $X(\psi(j))$ и рассмотрим отображение $\lambda:M^{n-k}\to X(\psi(1))$, покоординатно определенное набором A_M когомологических классов, за исключением классов $\kappa_{\psi(1)}+1,\dots,\kappa_\psi$. Переобозначим пространство $X(\psi(1))$ для краткости через X. Рассмотрим естественную фильтрацию

$$\dots\subset X^{(n-k+1)}\subset X^{(n-k)}\subset\dots\subset X^{(1)}\subset X, \tag{154}$$

которая определена как произведение стандартных фильтраций по каждой координате. Каждый страт $X^{(i)}\setminus X^{(i+1)}$, $i=1,\dots n-k$, распадается в объединение открытых клеток коразмерности i. Клетки определяются мультииндексами $\mu=(m_1,\dots,m_{\psi(n-k)})$, $m_1+\dots+m_{\psi(n-k)}=i$, $m_i\ge 0$, указывающими коразмерность минимального остова соответствующего координатного проективного пространства, в котором содержится данная клетка.

Предположим, что отображение λ находится в общем положении по отношению к фильтрации (154). Обозначим через $L^0\subset M^{n-k}$– 0-мерное подмногообразие, определенное как прообраз страта X^{n-k} фильтрации коразмерности $(n-k)=\dim(M^{n-k})$.

Рассмотрим $2^{\psi-\psi(1)}$–листное накрытие $p:\hat{M}^{n-k}\to M^{n-k}$, индуцированное набором когомологических классов $\kappa_M+\kappa_{\psi(1)+1},\dots,\kappa_M+\kappa_\psi$. На многообразии $\hat{M}^{n-k}$ определено скошенное оснащение $\Xi_{\hat{M}}$ и набор когомологических классов $A_{\hat{M}}=\kappa_{\hat{M}},\dots,\hat{\kappa}_{\psi(1)})$, индуцированный из поднабора $A_{M,1}=(\kappa_M,\dots\kappa_{\psi(1)})$ набора A_M на накрывающее многообразие $\hat{M}$ накрытии $p:\hat{M}^{n-k}\to M^{n-k}$.

Рассмотрим тройку $(\hat{M}^{n-k}, \Xi_{\hat{M}}, A_{\hat{M}})$. Эта тройка представляет трансфер тройки (M^{n-k}, Ξ_M, A_M) относительно набора когомологических классов $\kappa_{\psi(1)+1}, \dots, \kappa_{\psi}$. Докажем, что эта тройка $(\hat{M}^{n-k}, \Xi_{\hat{M}}, A_{\hat{M}})$ в классе нормального кобордизма допускает отображение $\hat{\lambda} : \hat{M}^{n-k} \to X$, определенное набором характеристических классов $A_{\hat{M}}$, для которого прообраз $\hat{\lambda}_1^{-1}(X^{(n-k)})$ является пустым.

По предположению k четно. Следовательно, поскольку n четно, многообразие M^{n-k} является ориентированным. Обозначим целочисленный коэффициент пересечения образа $\lambda(M^{n-k})$ с ориентированной клеткой из $X^{(n-k)} \setminus X^{(n-k+1)}$ номера μ через $lk(\mu)$. Аналогично определен также целочисленный набор $\{\hat{l}k(\mu)\}$ для отображения $\hat{\lambda}$. Очевидно, что набор $\{\hat{l}k(\mu)\}$ получен из набора $\{lk(\mu)\}$ умножением на $2^{\psi-\psi(1)}$.

Рассмотрим двулистное накрытие $\tilde{p} : \tilde{M}^{n-k} \to M^{n-k}$, индуцированное классом когомологий κ_M и рассмотрим композицию $\tilde{\lambda} : \tilde{M}^{n-k} \xrightarrow{\tilde{p}} M^{n-k} \xrightarrow{\lambda} X$. Многообразие $\tilde{M}^{n-k}$ является оснащенным. Обозначим через $\Psi_{\tilde{M}}$ этого многообразия, индуцированное из скошенного оснащения Ξ_M при накрытии $\tilde{p}$. Обозначим через $A_{\tilde{M}}$ набор когомологических классов $\{\kappa_{\tilde{M}}, \tilde{\kappa}_1, \dots, \tilde{\kappa}_{\psi(1)}\}$, индуцированных на 2-листное накрывающее $\tilde{M}^{n-k}$ при накрытии $\tilde{p}$. Тройка $(\tilde{M}^{n-k}, \Psi_{\tilde{M}}, A_{\tilde{M}})$ определяет элемент из группы $Imm^{fr;\kappa_1,\kappa_{\psi(1)}}(n-k,k)$. По определению порядок рассматриваемой группы равен $\psi - \psi(1) - 1$. Следовательно, $\psi - \psi(1) - 1$ экземпляров тройки $(\tilde{M}^{n-k}, \Xi_{\tilde{M}}, A_{\tilde{M}})$ нормально ограничивают.

Рассмотрим отображение $\tilde{\lambda} : \tilde{M}^{n-k} \to X$. Набор коэффициентов $\{lk(\tilde{\lambda})\}$ пересечения образа фундаментального класса $\tilde{\lambda}_*([\tilde{M}^{n-k}])$ с клетками пространства $X^{(k)} \setminus X^{(k+1)}$ равен удвоенному набору $lk(\mu)$, вычисленному по отображению λ.

Рассмотрим тройку $(2^{\sigma})(-\tilde{M}^{n-k}, -\Psi_{\tilde{M}}, A_{\tilde{M}})$, которая определена в результате дизъюнктного объединения 2^{σ}, $(\sigma = \psi - \psi(1) - 1)$ экземпляров тройки $(-\tilde{M}^{n-k}, -\Psi_{\tilde{M}}, A_{\tilde{M}})$. Здесь оснащение $\Psi_{\tilde{M}}$ заменено на обратное $-\Psi_{\tilde{M}}$ путем изменения ориентации первого базисного вектора оснащения (в частности, ориентация многообразия $\tilde{M}$ при этом также меняется). Набор коэффициентов пересечения для отображения $2^{\sigma}\tilde{\lambda}$, построенного по набору когомологических классов $(2^{\sigma})A_{\tilde{M}}$, обозначим через $\tilde{l}k(\mu)$.

Рассмотрим тройку $(\hat{M}'^{n-k}, \Xi_{\hat{M}'}, A_{\hat{M}'})$, которая определена как дизъюнктное объединение тройки $(\hat{M}^{n-k}, \Xi_{\hat{M}}, A_{\hat{M}})$ с тройкой $(2^{\sigma})(\tilde{M}^{n-k}, -\Psi_{\tilde{N}}, A_{\tilde{N}})$. Новая тройка представляет тот же элемент в группе $Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_{\psi(1)}}(k, n-k)$, что и исходная тройка $(\hat{M}^{n-k}, \Xi_{\hat{M}}, A_{\hat{M}})$. Определено отображение $\hat{\lambda}' : \hat{M}'^{k} \to X$. При этом набор коэффициентов

$\hat{l}k'(\mu)$, построенный для новой тройки, равен нулю, поскольку наборы $\{(2^{\sigma})\tilde{l}k(\mu)\}$, $\{\hat{l}k(\mu)\}$ отличаются знаком.

Определена нормальная перестройка тройки $(\hat{M}'^{n-k}, \Xi_{\hat{M}'}, A_{\hat{M}'})$ по семейству ручек индекса 1 при которой $\hat{\lambda}'^{-1}(X^{(n-k)}) = \emptyset$. Начальный этап индуктивной конструкции определен.

Переобозначим тройку $(\hat{M}'^{n-k}, \Xi_{M'}, A_{\hat{M}'})$ снова через (M^{n-k}, Ξ_M, A_M). Отображение, построенное по набору когомологических классов A_M обозначим снова через $\lambda : \hat{M}^{n-k} \to X$. По построению $\lambda^{-1}(X^{(n-k)}) = \emptyset$. Применим к рассматриваемому элементу гомоморфизм трансфера $r_{\kappa_{\psi(2)+1},\dots,\kappa_{\psi(1)}}$. В результате получим тройку, обозначаемую для краткости снова через $(\hat{M}^{n-k}, \Xi_{\hat{M}}, A_{\hat{M}})$.

Многообразие $\hat{M}^{n-k}$ определено как накрывающее пространство $2^{\psi(1)-\psi(2)}$–листного накрытия $p : \hat{M}^{n-k} \to M^{n-k}$ относительно классов когомологий $(\kappa_{\psi(2)+1}, \dots, \kappa_{\psi(1)})$. Скошенное оснащение $\Xi_{\hat{M}}$ индуцировано из оснащения Ξ_M при накрытии p. Набор когомологических классов $A_{\hat{M}} = \{\kappa_{\hat{M}}, \dots, \hat{\kappa}_{\psi(2)}\}$ на накрывающем многообразии $\hat{M}^{n-k}$ индуцирован из набора $(\kappa_M, \dots, \kappa_{\psi(2)})$ при накрытии p.

Рассмотрим пространство $X(\psi(2))$, определенное как произведение проективных пространств с индексами $(0, 1, \dots, \psi(2))$. Определено вложение $i_{\psi(2)} : X(\psi(2)) \subset X(\psi(1))$, соответствующее указанному набору координат. Пространство $X(\psi(2))$ само снабжено стратификацией, которая обозначается через

$$\dots \subset X^{i}(\psi(2)) \subset X^{i-1}(\psi(2)) \subset \dots \subset X(\psi(2)). \tag{155}$$

Вложение $i_{\psi(2)}$ согласовано со стратификациями (154), (155).

Набор $A_{\hat{M}}$ когомологических классов определяет отображение $\hat{\lambda} : \hat{M}^{n-k} \to X(\psi(2))$. Поскольку $\lambda^{-1}(X^{(n-k)}(\psi(1))) = \emptyset$, то и $\hat{\lambda}^{-1}(X^{(n-k)}(\psi(2))) = \emptyset$.

Обозначим через $\hat{L}^1 \subset \hat{M}^{n-k}$ одномерное подмногообразие, определенное по формуле $\hat{L}^1 = \hat{\lambda}^{-1}(X^{(n-k-1)}(\psi(2)))$. Ограничение когомологических классов набора $A_{\hat{M}}$ на подмногообразие $\hat{L}^1$ является тривиальным. В частности, это многообразие $\hat{L}^1$ является оснащенным. Компоненты многообразия $\hat{L}^1$ индексированы в соответствии с клетками старшей размерности пространства $X^{n-k-1}(\psi(2))$. При этом компонента, соответствующая фиксированному мультииндексу, распадается в дизъюнктное объединение 2^{s_1} оснащенных кривых (возможно, несвязных), которые диффеоморфны между собой как оснащенные 1-мерные многообразия.

Определено оснащенное 2-мерное многообразие $\tilde{K}^2$ с оснащенной границей $\partial(\tilde{K}^2) = (\tilde{L}^1)$. Оснащенное многообразие $(\tilde{K}^2, \Psi_K)$, определяет образующую ручки для нормальной перестройки, при которой класс кобордизма тройки $(\hat{M}^{n-k}, \Xi_{\hat{M}}, A_{\hat{M}})$ сохраняется. В результате нормального кобордизма получим другую тройку, обозначаемую через $(\hat{M}'^{n-k}, \Xi_{\hat{M}'}, A_{\hat{M}'})$. Набор когомологических классов $A_{\hat{M}'}$ определяет отображение $\hat{\lambda}' : \hat{M}'^{n-k} \to X(\psi(2))$ и при этом $\hat{\lambda}'^{-1}(X^{(n-k-1)}(\psi(2))) = \emptyset$.

Рассуждаем по индукции и переходим к следующему этапу, при помощи 2^{s_2}–листного накрытия относительно набора классов когомологий $(\hat{\kappa}_{\psi(3)+1}, \dots, \hat{\kappa}_{\psi(2)})$. Изменяем параметр j от 2 до $n-k$. На j-ом шаге получаем тройку $(\tilde{M}_j^{n-k}, \Xi_{\tilde{M}_j}, A_{\tilde{M}_j})$, при этом отображение $\hat{\lambda}_j$: $\hat{M}_j^{n-k} \to X(\psi(j))$, построенное по набору $A_{\tilde{M}_j}$, удовлетворяет условиям: $\hat{\lambda}_j^{-1}(X^{(n-k-j+1)}(\psi(j))) = \emptyset$, а многообразие $\hat{\lambda}_j^{-1}(X^{(n-k-j)}(\psi(j)))$ является оснащенным j-мерным многообразием, которое оснащенно ограничивает.

Переход к последующему этапу осуществляется посредством оснащенной перестройки и переходом к 2^{s_j}-листному накрытию относительно классов когомологий $(\hat{\kappa}_{\psi(j-1)+1}, \dots, \kappa_{\psi(j)})$.

На заключительном шаге конструкции получим элемент $r_{tot}(\alpha)$ (см. (153)), который является границей в группе $Imm^{sf}(n-k,k)$. Предложение 32 доказано.

Опишем полное алгебраическое препятствие для построения ретракции заданного порядка.

Лемма 33. *Произвольный элемент x в группе кобордизмов $Imm^{sf,\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k,k)$ допускает ретракцию порядка i, тогда и только тогда, когда $J_{sf}^{k'}(x) \in Imm^{sf,\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k',k')$ (в предположении $i \le n-k' \le n-k$) допускает ретракцию того же порядка i.*

Следствие 34. *Для произвольного элемента $x \in Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k,k)$ полное препятствие к построению ретракции порядка q (в предположении $0 \le q \le n-k$) определено элементом $J_{sf}^{n-q-1}(x) \in Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(q+1,n-q-1)$.*

Для доказательства Леммы 33 докажем еще одну лемму. Предположим, что скошенно-оснащенное многообразие (M^{n-k}, Ξ_M), снабженное семейством $A_M = (\kappa_M, \kappa_1, \dots, \kappa_j)$ когомологических классов, представляет элемент в группе кобордизмов $Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k,k)$. Пусть $\kappa'_M : M^{n-k} \to \mathbb{RP}^{n-k-i}$, $i < n-k$ – ретракция порядка $(i-1)$ относительно характеристического класса κ_M скошенного оснащения Ξ_M. Рассмотрим подмногообразие $Q^i \subset M^{n-k}$, определенное по формуле $Q^i = \kappa_M'^{-1}(pt), pt \in \mathbb{RP}^{k-i}$. Многообразие Q^i снабжено естественным оснащением Ξ_Q с нулевым характеристическим классом, поскольку подмногообразие $Q^i \subset M^{n-k}$ является оснащенным подмногообразием и поскольку ограничение скошенного оснащения $\Xi_M|_Q$ является оснащением. Кроме того, определен набор когомологических классов A_Q, полученный ограничением когомологических классов набора A_M на подмногообразие $Q^i \subset M^{n-k}$. Класс $\kappa_Q = \kappa_M|_Q$ при этом оказывается тривиальным. Тройка (Q^i, Ξ_Q, A_Q) представляет элемент в группе оснащенных кобордизмов $Imm^{fr;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(i, n-i)$, который мы обозначим через y.

Лемма 35. *Тройка (M^{n-k}, Ξ_M, A_M), определяющая элемент x в группе кобордизма $Imm^{sf,\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k, k)$ при условиях, описанных выше, допускает ретракцию порядка i относительно когомологического класса κ_M тогда и только тогда, когда элемент $y \in Imm^{fr,\kappa_1,\dots,\kappa_j}(i, n-i)$ лежит в ядре гомоморфизма $\delta : Imm^{fr;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(i, n-i) \to Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(i, n-i)$.*

Доказательство Леммы 35

В начале докажем полноту препятствия к построению ретракции. По условию для элемента $y \in Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(i, n-i)$ имеем $\delta(y) = 0$. Рассмотрим скошенно-оснащенное многообразие (P^{i+1}, Ξ_P), $\partial P^{i+1} = Q^i$, снабженное набором когомологических классов A_P, причем ограничение $A_P|_Q$ совпадает с A_Q. Построим многообразие T^{n-k}, определенное в результате перестройки многообразия M^{n-k} по ручке, которая описывается ниже. Ручка определена как сферическая граница дискового подоснащения в дисковом $(n-k-i)$-мерном оснащении Ξ_P над многообразием P^{i+1}. Центральное подмногообразие ручки имеет размерность $(n-k-i)$, при этом размерность самой ручки совпадает с размерностью $n-k$ многообразия.

Опишем ручку подробнее. Рассмотрим подрасслоение в нормальном (оснащенном) расслоении над P^{i+1}, порожденное первыми $(k-i)$ векторами оснащения Ξ_P в каждом слое и обозначим через U_P подпространство дискового расслоения, ассоциированного с данным векторным. Пространство U_P является телом рассматриваемой ручки. Это пространство является скошенно-оснащенным в коразмерности $(n-k)$ многообразием с краем.

Граница ∂U_P содержит подмногообразие $Q^i \times D^{n-k-i}$, которое представляет дисковое расслоение над многообразием Q^i. Вторая копия многообразия $Q^i \times D^{n-k-i}$ вложена в компоненту $M^{n-k} \times \{1\}$ границы многообразия $M^{n-k} \times I$ и представляет регулярную дисковую окрестность подмногообразия $Q^i \times \{1\} \subset M^{n-k} \times \{1\}$. Определим многообразие T^{n-k} по формуле

$$T^{n-k} = \partial^+((M^{n-k} \times I) \cup_{Q^i \times D^{n-k-i}} U_P),$$

где через ∂^+ обозначена компонента границы, соответствующая перестроенной компоненте $M^{n-k} \times \{1\}$ границы $\partial(M^{n-k} \times I)$.

Заметим, что после стандартной операции "сглаживания углов" многообразие T^{n-k} становится гладким (замкнутым). Это многообразие допускает каноническое скошенное оснащение Ξ_T с характеристическим классом κ_T. Оснащение Ξ_T размерности k получено в результате склейки соответствующих скошенных оснащений к ручке и к многообразию Ξ_M вдоль общей части Q^i. Многообразие T^{n-k} снабжено набором когомологических классов $A_T = \{\kappa_T, \kappa_1, \dots, \kappa_j\} \in H^1(T^{n-k}; \mathbb{Z}/2)$, каждый класс из этого набора получен в результате склейки соответствующих когомологических классов на многообразии $M^{n-k} \times I$ и на ручке. Тройка (T^{n-k}, Ξ_T, A_T) представляет класс кобордизма исходного элемента (M^{n-k}, Ξ_M, A_M) в группе кобордизмов $Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k,k)$.

Докажем, что многообразие T^{n-k} допускает ретракцию порядка i относительно когомологического класса κ_T. Докажем, что этот когомологический класс представлен отображением $\kappa_T : T^{n-k} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-i-1} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ (классифицирующее отображение обозначается также как и соответствующий когомологический класс). Выберем натуральное b достаточно большим, и рассмотрим отображение $\kappa_M : M^{n-k} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^b$, для которого полный прообраз проективного подпространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^{b-n+k+i} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^b$ коразмерности $n-k-i$ совпадает с подмногообразием Q^i.

Рассмотрим отображение $g : P^{i+1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{b-n+k+i}$, ограничение которого на границу $\partial P^{i+1} = Q^i$ совпадает с отображением $\kappa_M|_{Q^i}$. Рассмотрим отображение $h : U_P \to \mathbb{R}\mathrm{P}^b$, которое определено посредством "утолщения"отображения g с P^{i+1} на U_P, т.е. посредством расширения отображения g до морфизма дискового расслоения в расслоение регулярной окрестности подмногообразия $\mathbb{R}\mathrm{P}^{b-n+k+i} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^b$. Заметим, что отображение $M^{n-k} \cup_{Q^i \times D^{n-k-i}} U_P \to \mathbb{R}\mathrm{P}^b$ корректно определено, при этом ограничение этого отображения на подмногообразие $T^{n-k} \subset M^{n-k} \cup U_P$ не пересекает подмногообразие $\mathbb{R}\mathrm{P}^{b-n-k+i} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^b$. Поскольку открытое многообразие $\mathbb{R}\mathrm{P}^b \setminus \mathbb{R}\mathrm{P}^{b-n-k+i}$ гомотопически эквивалентно многообразию $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-i-1}$, требуемая ретракция κ_T порядка i в заданном классе когомологий построена.

Докажем обратное утверждение, а именно, докажем, что если скошенно-оснащенное многообразие T^{n-k} допускает ретракцию порядка i относительно характеристического класса когомологий скошенного оснащения, то оснащенное многообразие (Q^i, Ψ_Q, A_Q), определенное как прообраз точки при отображении ретракции порядка $i-1$, ограничивает как скошенно-оснащенное многообразие в коразмерности $(n-i)$, т.е. определяет нулевой элемент $\delta(y)$ в группе кобордизма $Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(i, n-i)$.

Пусть (W^{n-k+1}, Ξ_W) – скошенно-оснащенное многообразие с границей $\partial W^{n-k+1} = M^{n-k} \cup M_1^{n-k}$, которое определяет нормальный кобордизм между скошенно-оснащенными многообразиями M^{n-k} и M_1^{n-k}. Кроме того, предположим, что многообразие M_1^{n-k} допускает ретракцию порядка i. Отображение ретракции мы обозначим через $\kappa'_{M_1} : M_1^{n-k} \to \mathbb{RP}^{n-k-i-1}$. Если натуральное число b достаточно велико (например, $b > n-k+1$), то отображение $F : W^{n-k+1} \to \mathbb{RP}^b$, для которого $F|_{M^{n-k}} = \kappa_M$, $F|_{M_1} = \kappa'_{M_1}$, т.е. $Im(F(M^{n-k})) \subset \mathbb{RP}^{n-k-i} \subset \mathbb{RP}^b$, $Im(F(M_1^{n-k})) \subset \mathbb{RP}^{n-k-i-1}$ корректно определено. Рассмотрим подмногообразие $\mathbb{RP}^{b-n-k+i} \subset \mathbb{RP}^b$, которое пересекает подмногообразие $\mathbb{RP}^{n-k-i} \subset \mathbb{RP}^b$ (подмногообразие $\mathbb{RP}^{n-k-i} \subset \mathbb{RP}^b$ содержит образ многообразия M^{n-k} при отображении κ_M) по точке $pt \in \mathbb{RP}^{n-k-i} \setminus \mathbb{RP}^{n-k-i-1}$ и не пересекает подмногообразие $\mathbb{RP}^{n-k-i-1} \subset \mathbb{RP}^{n-k-i}$ (подмногообразие $\mathbb{RP}^{n-k-i-1} \subset \mathbb{RP}^{n-k-i}$ содержит образ многообразия M_1^{n-k} при отображении κ'_{M_1}).

Обозначим через P^{i+1} подмногообразие $F^{-1}(\mathbb{RP}^{b-n+k+i})$. По построению $\partial P^{i+1} = Q^i$. Определим скошенное оснащение Ξ_P размерности $(n-i)$ как прямую сумму оснащений подмногообразия $P^{i+1} \subset W^{n-k+1}$ и оснащения Ξ_W, которое получается в результате ограничения оснащения с W^{n-k+1} на подмногообразие $P^{i+1} \subset W^{n-k+1}$.

Заметим, что ограничение оснащения Ξ_W на $\partial W^{n-k+1} = Q^{n-k}$ совпадает с оснащением Ξ_Q. Аналогичное утверждение справедливо для семейства коциклов $A_P = \{\kappa_P, \kappa_1, \dots, \kappa_j\}$, полученных в результате ограничения семейства коциклов с W^{n-k+1} на P^{i+1}. Следовательно, элемент y, представленный тройкой (Q^i, Ξ_Q, A_Q), лежит в ядре гомоморфизма δ. Лемма 35 доказана.

Доказательство Леммы 33

По Лемме 35, препятствие к ретракции порядка i в классе кобордизма тройки (M^{n-k}, Ξ_M, A_M), представляющей заданный элемент x в группе кобордизма $Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k,k)$, совпадает (в предположении, что ретракция порядка $i-1$ уже построена) с препятствием к ретракции того же порядка i для многообразия $M_1^{n-k'}$, которое является образом элемента x в группе $Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k',k')$ при гомоморфизме $J^{sf}_{k'} : Imm^{sf,\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k,k) \to Imm^{sf,\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k',k')$. При построении последовательности ретракций все более высокого порядка будем сравнивать, в соответствии с Леммой 31, необходимые и достаточные условия ретракции следующего порядка для элемента из исходной группы $Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k,k)$ и для образа этого элемента в группе $Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(n-k',k')$. На каждом шаге конструкции оба препятствия совпадают. Лемма 33 доказана.

Для доказательства теоремы о ретракции нам потребуется конструкция, принадлежащая У.Кошорке (см.[K]), полного препятствия к построению послойного мономорфизма двух векторных расслоений.

Предположим, что $\alpha \to Q^q$, $\beta \to Q^q$ – пара векторных расслоений над многообразием Q^q (вообще говоря, Q^q является многообразием с границей) $dim(\alpha) = a$, $dim(\beta) = b$, $dim(Q^q) = q$, при этом предполагается, что выполнено $2(b-a+1) < q$. Пусть $u : \alpha \to \beta$ – морфизм общего положения, обозначим через $\Sigma \subset Q^q$ – подмногообразие, определенное формулой

$$\Sigma = \{x \in Q^q | ker(u_x : \alpha_x \to \beta_x) \ne 0\},$$

т.е. подмногообразие точек базы с вырождением слоев при морфизме u. Заметим, что при рассматриваемых размерностных ограничениях, для морфизма u_x общего положения мы имеем $rk(u_x) \ge a-1$. Коразмерность подмногообразия $\Sigma \subset Q^q$ при этом равна $b-a+1$.

Опишем нормальное расслоение к подмногообразию $\Sigma \subset Q^q$. Обозначим через $\lambda : E(\lambda) \to \Sigma$ – линейное расслоение, определенное как поле ядер морфизма u над особым подмногообразием $\Sigma \subset Q^q$. Определено, тем самым, включение расслоений $\varepsilon : \lambda \subset \alpha$. Обозначим через Λ_α – расслоение над Σ, определенное как ортогональное дополнение подрасслоения $\varepsilon(\lambda) \subset \alpha$. Естественный морфизм (послойный мономорфизм) $v_x : \Lambda_\alpha \subset \beta$ определен. Расслоение Λ_β определено как расслоение, слои которого ортогональны над точками $x \in \Sigma$ в слоях β_x расслоения β подпространствам $v_x(\Lambda_{\alpha_x})$. Нормальное расслоение $\nu(\Sigma)$ к подмногообразию $\Sigma \subset Q$ определено по формуле

$$\nu(\Sigma) = \lambda \otimes \Lambda_\beta. \tag{156}$$

В работе [K2] (в которой приводится ссылка на более ранние работы того же автора) определяется группа кобордизма вложенных многообразий коразмерности $b-a+1$, причем нормальное расслоение подмногообразия, представляющего элемент этой группы кобордизма, определено по формуле (156). Указанная структура нормального расслоения сохраняется при кобордизме. Для произвольного морфизма $u : \alpha \to \beta$ общего положения определяется представитель, задающий элемент в описанной группе кобордизма, который служит полным препятствием для построения послойного мономорфизма указанных расслоений.

Если Q^q – многообразие с границей, причем морфизм расслоений, заданных на всем Q^q, определен над границей ∂Q, то многообразие S_∂ критических слоев над границей служит границей подмногообразия $\Sigma \subset Q^q$, $\partial\Sigma = \Sigma_\partial$ с нормальным расслоением, определенным по аналогичной формуле.

Пусть $\nu \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ – векторное расслоение размерности $(n+1-2^k)$, $2^k < n+2$ над вещественным проективным пространством, изоморфное сумме Уитни $(n+1-2^k)$ экземпляров линейного нетривиального расслоения $\kappa_{\mathbb{R}\mathrm{P}}$ над $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$. Обозначим расслоение $\nu \times \kappa$ через $\bar{\nu}$. Определена естественная проекция $\pi : \bar{\nu} \to \nu$ с ядром κ. Заметим, что расслоение $\bar{\nu} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ является нормальным расслоением к многообразию $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ размерности $(n-2^k+2)$. По теореме Коэна [C] стандартное проективное пространство $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ погружается в евклидово пространство размерности $2^{k+1}-2-k$.

Замечание

Чтобы ослабить размерностные ограничения в рамках данного доказательства, можно воспользоваться более сильным результатом о том, что проективное пространство $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2b(k)-1}$ погружается в $\mathbb{R}^{2b(k)-1-4k}$, где $b(k)$– число Радона-Гурвица, равное соответствующей степени числа 2, причем $b(k) < 2^k$. Это утверждение эквивалентно существованию семейства $(n+3-2^{k+1}+k)$ независимых сечений расслоения $\bar{\nu}$.

Определим понятие стандартного семейства $(n+3-2^k+k)$ сечений (особенности семейства сечений допускаются) расслоения ν.

Определение стандартного семейства сечений расслоения ν

Выберем невырожденное семейство сечений $\bar{\Psi} = \{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_s\}$, $s = (n+3-2^{k+1}+k)$ расслоения $\bar{\nu}$. Рассмотрим семейство сечений общего положения $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_s\}$, которое получено в результате проекции семейства $\bar{\Psi}$ при $\pi : \bar{\nu} \to \nu$. Семейство Ψ назовем стандартным.

Обозначим через $\Sigma \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ подмногообразие точек базы, для которых стандартное семейство сечений имеет особенности. Обозначим через ν_Σ нормальное расслоение к этому подмногообразию.

Лемма 36. *Многообразие $\Sigma \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ является k-мерным подмногообразием, причем его нормальное расслоение ν_Σ снабжено скошенным оснащением Ξ_Σ, характеристический класс κ_Σ которого совпадает с ограничением характеристического класса $\kappa \in H^1(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1};\mathbb{Z}/2)$ на подмногообразие Σ, $\kappa_\Sigma = \kappa|_{\Sigma\subset\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}}$.*

Доказательство Леммы 36

Вычислим нормальное расслоение ν_Σ по теореме Коршорке. Более того, определим скошенное оснащение этого расслоения. Пусть $\lambda \subset \bar{\Psi}$ – расслоение ядер семейства сечений над особым подмногообразием Σ. Поскольку семейство сечений является стандартным, $\lambda = \kappa_\Sigma$. Расслоение $\bar{\Psi}/\lambda$ является обратным к λ. С другой стороны, расслоение $\nu|_\Sigma$ само обращает расслоение κ_Σ. Следовательно, ортогональное дополнение к $\bar{\Psi}/\lambda|_\Sigma$ в расслоении ν является тривиальным расслоением размерности (2^k-k-1). По теореме Кошорке расслоение ν_Σ естественно изоморфно расслоению $(2^k-k-1)\varepsilon\otimes\kappa = (2^k-k-1)\kappa$. Этот изоморфизм определяет скошенное оснащение расслоения ν_Σ с характеристическим классом κ_Σ. Лемма 36 доказана.

Пусть теперь многообразие M^m имеет размерность $dim(M) = m = 2^k-2$ и является скошенно-оснащенным в коразмерности $n - dim(M)$, где $n = -2(mod 2^k)$. Рассмотрим отображение $\kappa_M : M^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$, заданное характеристическим классом оснащения многообразия M^m. Предположим, что M^m снабжено набором когомологических классов $A_M = \{\kappa_M, \kappa_1, \dots, \kappa_j\}$, при этом определен элемент $\alpha \in Imm^{sf,\kappa_1,\dots,\kappa_j}(2^k-2, n-2^k+2)$.

Рассмотрим расслоение $\bar{\nu} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$, $\bar{\nu} = (n-2^k+2)\kappa_{\mathbb{R}\mathrm{P}}$ размерности $\dim(\bar{\nu}) = n - 2^k + 2$. Заметим, что нормальное расслоение ν_M той же размерности изоморфно обратному образу расслоения $\bar{\nu}$ при отображении $\kappa_M : M^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$, $\nu_M = \kappa_M^*(\bar{\nu})$. Рассмотрим отображение $c_M : M^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1} \times \prod_{i=1}^j \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$, определенное по набору классов когомологий A_M. Рассмотрим отображение проекции $\pi : \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1} \times \prod_{i=1}^j \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ на первый сомножитель. Композиция $\pi \circ l : M^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$, очевидно, совпадает с отображением κ_M. Определим подрасслоение $\phi_M \subset \nu_M$ коразмерности 1 (т.е. размерности $n+1-2^k$) такое, что $\phi_M = \kappa_M^*(\nu)$.

Индуцируем набор сечений $\Xi_M = \{\xi_1, \dots, \xi_s\}$, $s = n+3-2^{k+1}+k$ расслоения ϕ_M из стандартного набора сечений $\Psi = \{\psi_1, \dots \psi_s\}$ расслоения ν отображением κ_M. Обозначим через $N^{k-1} \subset M^m$ подмногообразие размерности $(k-1)$ особых семейств сечений. Многообразие N^{k-1} снабжено набором когомологических классов A_N, полученный ограничением соответствующих классов набора A_M на это подмногообразие. При этом класс $\kappa_M|_N$ обозначается через κ_N.

Нормальное расслоение ν_N изоморфно сумме Уитни $\nu_N = \nu_M|_N \times \nu_{N \subset M}$, где ν_M–нормальное расслоение многообразия M^m, $\nu_{N\subset M}$ – нормальное расслоение подмногообразия N^{k-1} внутри M^m снабжено скошенным оснащением с характеристическим классом κ_N. Заметим, что расслоение $\nu_M|_N$ также снабжено скошенным оснащением с тем же характеристическим классом, что доставляет скошенное оснащение Ξ_N многообразия N^{k-1} в коразмерности $(n-k+1)$.

Лемма 37. *Тройка* (N^{k-1}, Ξ_N, A_N) *определяет элемент* $x_{k-1} \in Imm^{sf,\kappa_1,\dots,\kappa_j}(k-1, n-k+1)$*, который является полным препятствием к построению ретракции порядка* $(k-1)$ *для исходного элемента* $x \in Imm^{sf,\kappa_1,\dots,\kappa_j}(2^k-2, n-2^k+2)$.

Доказательство Леммы 37

Рассмотрим многообразие $\Sigma^k \subset \mathbb{RP}^{2^k-1}$ особых сечений семейства Ψ, которое ниже будет переобозначено через Σ^k_0. Это многообразие снабжено естественной стратификацией (фильтрацией):

$$\emptyset \subset \Sigma^0_k \subset \dots \subset \Sigma^{k-1}_1 \subset \Sigma^k_0 \subset \mathbb{RP}^{2^k-1}. \qquad (157)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что каждое многообразие в фильтрации (157) является связным. Подмногообразие Σ_i, $dim(\Sigma_i) = k-i$ этой фильтрации определен как особое подмногообразие подсемейства сечений, состоящего из первых $(s-i)$-сечений. Из прямых вычислений вытекает, что фундаментальный класс $[\Sigma_i]$ соответствующего члена фильтрации представлен образующей в $H_{k-i}(\mathbb{RP}^{2^k-1}; \mathbb{Z}/2)$. Действительно, это следует из того, что указанный цикл двойственен характеристическому классу $w_{n+1-2^k-k+i}((n+1-2^k)\kappa_{\mathbb{RP}^{2^k-1}})$.

Предположим, что отображение $\kappa_M : M^m \to \mathbb{RP}^{2^k-1}$ является трансверсальным вдоль построенной стратификации в образе и прообраз стратификации (157) мы обозначим через

$$N^0_{k-1} \subset N^1_{k-2} \subset \dots \subset N^{k-1}_0 \subset M^m, \qquad (158)$$

причем старшее многообразие фильтрации N_0^{k-1} совпадает с многообразием N^{k-1}, которое было построено ранее.

Проведем рассуждения индукцией по параметру i, $i = 0, \dots, k-1$. Рассуждения в случае $i = 0$ элементарны. Четномерное многообразие M^m является ориентированным, поэтому представляет нулевой класс гомологий в $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$.

Предположим, что образ отображения $\kappa_M : M^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ уже лежит в стандартном проективном подпространстве $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-2-i} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$. Тогда $N_{k-i}^{i-1} = \emptyset$. Заметим, что страт Σ_{k-i}^i можно выбрать в классе изотопии так, что множество точек пересечения $\Sigma_{k-i}^i \cap \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1-i}$ состоит из единственной точки. Действительно, индекс пересечения фундаментальных классов подмногообразий $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1-i}, \Sigma_{k-i}^i$ в многообразии $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-1}$ нечетен и может принимать произвольные нечетные значения. Применяя прием Уитни, можно выбрать Σ_{k-i}^i в классе изотопии так, что геометрически указанные подмногообразия пересекаются по минимально возможному множеству точек, т.е. точка пересечения всего одна.

Оснащенное подмногообразие N_{k-i-1}^i является регулярным прообразом точки при отображении в остов $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-2-i}$ и представляет элемент x_i из группы кобордизма $Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(i, n-i)$. Тогда по Лемме 32, поскольку $x_i = 0$, (что сразу следует из предположения $x_{k-1} = 0$), существует нормальный кобордизм отображения c_M такой, что в результате получается отображение (которое мы обозначим через c'_M), для которого образ $\pi \circ c'_M$ лежит в подпространстве $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k-2-i}$. Далее переходим от i к $(i+1)$ и повторяем аналогичные рассуждения. В предположении равенства $x_{k-1} = 0$ в классе кобордизма можно построить ретракцию порядка $(k-1)$. Лемма 37 доказана.

Основным при доказательстве теоремы ретракции является следующее предложение.

Предложение 38. *Пусть $n = -2(mod(2^k))$, $n > 2^k$ и пусть для заданного элемента $x \in Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(2^k-2, n-2^k+2)$ рассматривается препятствие $x_{k-1} \in Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(k-1, n-k+1)$ к построению ретракции порядка $(k-2)$ в классе кобордизма x. Тогда элемент x_{k-1} лежит в образе гомоморфизма трансфера, т.е. существует элемент $y_{k-1} \in Imm^{sf,\kappa_1,\dots,\kappa_{j+1}}(k-1, n-k+1)$, для которого $r_{j+1}(y_{k-1}) = x_{k-1}$.*

Доказательство Предложения 38

Рассмотрим нормальное расслоение $\nu_M = (n-2^k+2)\kappa_M$ к многообразию M^m, $dim(M^m) = m = 2^k-2$ и подрасслоение $\phi_M \subset \nu_M$, $\phi = (n-2^k+1)\kappa_M$

коразмерности 1, которое ортогонально линейному подрасслоению $\kappa_M \subset \nu_M$. Существует невырожденное семейство сечений $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$, $s = n + 3 + k - 2^{k+1}$, расслоения ϕ.

Действительно, расслоение ϕ_M является нормальным расслоением к многообразию (с краем), которое определено как тотальное пространство дискового расслоения $D(\kappa_M)$. Поскольку $dim(D(\kappa_M)) = 2^k - 1$, $\alpha(2^k - 1) = k$, по теореме Коэна [C] многообразие $D(\kappa_M)$ погружается в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2^{k+1}-2-k}$ (это утверждение сформулировано как Гипотеза 39 и прямое доказательство частного случая этой гипотезы приводится в Следствии 40). В частности, расслоение ϕ_M допускает семейство s невырожденных сечений. Не ограничивая общности, можно считать, что скошенно-оснащенное многообразие M^{2^k-2} выбрано в классе нормального кобордизма.

Рассмотрим, кроме того, семейство сечений $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_s\}$, которое индуцировано из стандартного семейства сечений расслоения $(n + 1 - 2^k)\kappa_{\mathbb{RP}^{2^k-1}}$ при отображении κ_M. Определено поднятие семейства Ψ в невырожденное семейство сечений $\bar{\Psi} = \{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_s\}$ расслоения ν_M. Семейство $\bar{\Psi}$ проектируется семейство Ψ при проекции $\nu_M \to \phi_M$ вдоль подрасслоения κ_M. Поднятие невырожденного семейства $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ в невырожденное семейство сечений расслоения ν_M обозначим через $\{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_s\}$.

Рассмотрим, кроме того, семейство сечений общего положения $\bar{X} = \{\bar{\chi}_1, \dots \bar{\chi}_s\}$ на многообразии $M^{2^k-1} \times I$ расслоения $\nu(M^{2^k-1}) \times I$, которое совпадает с семейством $\{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_s\}$ на компоненте границы $M^{2^k-1} \times \{1\}$ и с семейством сечений $\{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_s\}$ на компоненте $M^{2^k-1} \times \{0\}$ границы. Семейство сечений $\{\bar{\chi}_1, \dots, \bar{\chi}_s\}$ имеет, вообще говоря, особенности. Подмногообразие особых сечений обозначим через $V^{k-1} \subset M^m \times I$. Это замкнутое многообразие размерности $k - 1$. Аналогично введем обозначение $\{\chi_1, \dots, \chi_s\}$ для проекции рассматриваемого семейства сечений в семейство сечений расслоения $\phi_M \times I$ (обозначим это расслоение через $\phi_{M \times I}$). Семейство сечений $\{\chi_1, \dots, \chi_s\}$ также рассматривается с заданными граничными условиями, определенными проекциями семейств $\{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_s\}$, $\{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_s\}$.

Пусть $K^k \subset M^m \times I$, $m = 2^k - 2$ – подмногообразие размерности k, определенное как подмногообразие особенностей семейства сечений $\{\chi_1 \dots, \chi_s\}$. Это подмногообразие имеет компоненту границы $K^k \cap (M^m \times \{1\})$, которую мы обозначим через $N^{k-1} \subset M^m \times \{1\}$. Согласно Лемме 33, тройка (N^{k-1}, Ξ_N, A_N), где Ξ_N – скошенное оснащение нормального расслоения подмногообразия N^{k-1}, определенное по теореме Кошорке, и семейство когомологических классов $A_N = A_M|_{N^{k-1}}$, представляет элемент x_{k-1} в группе $Imm^{\kappa_1,\dots,\kappa_j;sf}(k-1, n-k+1)$, который определяет полное препятствие к построению ретракции порядка $(k-1)$ в классе кобордизма $x = [(M^m, \Xi_M, \kappa_M)]$. Рассмотрим поднятие семейства сечений $\{\chi_1 \dots, \chi_s\}$ расслоения $\phi_{M\times I}$ до семейства сечений $\{\bar{\chi}_1 \dots \bar{\chi}_s\}$ общего положения расслоения $(n+2-2^k)\kappa_{M\times I}$. Граничные условия записываются в виде:

$$\bar{\chi}_l|_{M^m\times\{0\}} = \bar{\xi}_l, \qquad \bar{\chi}_l|_{M^m\times\{1\}} = \bar{\psi}_l, \qquad l = 1, \dots, s. \tag{159}$$

Заметим, что определено включение $V^{k-1} \subset K^k$ подмногообразий коразмерности 1, поскольку над V^{k-1} семейство сечений $\bar{X} = \{\bar{\chi}_1 \dots \bar{\chi}_s\}$ вырождается. Подмногообразие V^{k-1} замкнуто, поскольку на границе $\partial(M^m \times I)$ семейство сечений $\bar{X}$ не имеет особенностей. Применим формулу (156) для вычисления стабильного нормального расслоения к подмногообразию K^k и к подмногообразию $V^{k-1} \subset K^k$. Обозначим через $\bar{\lambda}$ – линейное расслоения ядер семейства сечений $\bar{X}$ над V^{k-1}.

Докажем, что нормальное расслоение подмногообразия $V^{k-1} \subset M^m \times I$ в объемлющем многообразии изоморфно расслоению $\varepsilon \times (m-k+1)\lambda$. Действительно, ограничение нормального расслоения $\nu(M^m)|_V$ изоморфно расслоению $(n+2-2^k)\kappa_{M\times I}$, и, кроме того, изоморфно тривиальному расслоению $(n+2-2^k)\varepsilon$, причем изоморфизм выбирается каноническим (не зависящим ни от M^m ни от V^{k-1}). Расслоение $\bar{\Lambda}$, дополнительное к линейному расслоению $\bar{\lambda}$ в тривиальном расслоении линейных комбинаций векторов сечений, представляет расслоение $-\bar{\lambda}$, обратное к расслоению λ. Следовательно, ортогональное дополнение к образу этого расслоения в расслоении $\nu_M|_V$ изоморфно расслоению $\bar{\lambda}\times(2^k-k-1)\varepsilon$. Искомое нормальное расслоение подмногообразия $V^{k-1} \subset M^{2^k-2}\times I$ (тем самым, и стабильное нормальное расслоение многообразия V^{k-1}) изоморфно расслоению $\bar{\lambda}\otimes(\bar{\lambda}\times(2^k-k-1)\varepsilon) = \varepsilon\times(2^k-k-1)\bar{\lambda}$.

Обозначим через $U_V \subset K^k$–регулярную окрестность подмногообразия $V^{k-1} \subset K^k$. Поле ядер семейства $\{\chi_1, \dots, \chi_s\}$, ограниченное на V^{k-1}, (а, следовательно, и на U_V) задано линейным расслоением λ, ограниченным с K^k на V^{k-1}, (на U_V) и это расслоение обозначается через $\bar{\lambda}$. С учетом того, что ограничение каждого из расслоений $(2^{k-1})\bar{\lambda}$, $(2^{k-1})\kappa_M$ на подмногообразие V^{k-1} канонически изоморфно тривиальному расслоению, ортогональное дополнение к расслоению сечений в расслоении $\phi\times I|_{V^{k-1}}$ изоморфно расслоению $\bar{\lambda}\times(2^{k-1}-k)\varepsilon\times(2^{k-1}-1)\kappa_M$. При этом по аналогичным вычислениям, нормальное расслоение к подмногообразию $K^k \subset M^{2^k-2}\times I$ (внутри объемлющего многообразия) изоморфно расслоению $\varepsilon\times(2^{k-1}-1-k)\bar{\lambda}\times(2^{k-1}-1)\kappa_M\otimes\lambda$. Откуда следует, что стабильный класс изоморфизма рассматриваемого расслоения вычисляется по формуле $(-1-k)\bar{\lambda}-(\kappa_M\otimes\bar{\lambda})$.

Отсюда, в частности, вытекает, что линейное нормальное расслоение подмногообразия $V^{k-1} \subset K^k$, совпадающее с линейным расслоением подмногообразия V^{k-1} в регулярной окрестности U_V, изоморфно расслоению $\bar{\lambda} \otimes \kappa_M$. Обозначим через Q^{k-1} – границу регулярной окрестности U_V, т.е. $Q^{k-1} = \partial U_V$. Многообразие $K^k \setminus U_V$ имеет компоненты границы $\partial(K^k \setminus U_V) = Q^{k-1} \cup K^{k-1}$ и является скошенно-оснащенным в коразмерности $n-k$ с характеристическим классом оснащения $\kappa_{M\times I}|_{K\setminus U_V}$. Действительно, нормальное расслоение этого подмногообразия было описано выше, а полное нормальное расслоение получается из нормального расслоения подмногообразия в результате суммы Уитни с тривиальным $(n+2-2^k)$–мерным расслоением, которое канонически изоморфно расслоению $(n+2-2^k)\kappa_{M\times I}$.

Тройка (N^{k-1}, Ξ_N, A_N) $(Q^{k-1}, \Xi_Q, A_Q))$, состоящая из многообразия N^{k-1} (Q^{k-1}) вместе со скошенным оснащением Ξ_K (Ξ_Q) и семейством A_K (A_Q) когомологических классов, которое определено как ограничение семейства $A_{M\times I} = \{\kappa_1, \dots, \kappa_j\}$ на рассматриваемое подмногообразие с объемлющего многообразия $M^{2^k-2} \times I$, определяют соответствующие элементы в группе кобордизма $Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(k-1, n-k+1)$. Для краткости эти элементы будем обозначать через $[K]$, $[Q]$, не указывая дополнительную структуру скошенного оснащения и набора классов когомологий.

По аналогичным соображениям многообразие $K^k \setminus U_V$, снабженно набором когомологических классов $\{\kappa_1|_{N\setminus U_V}, \dots, \kappa_j|_{N\setminus U_V}\}$ и скошенным оснащением в коразмерности $(n-k+1)$ с характеристическим классом $\kappa_{M^m\times I}|_{K^k\setminus U_V}$, определяет скошенно-оснащенный кобордизм между $[K]$ и $[Q]$. По построению $[K] = \alpha_{k-1}$ представляет полное препятствие к ретракции порядка $(k-1)$ исходного элемента (M^{2^k-2}, Ξ_M, A_M) относительно характеристического класса κ_M. Элемент $[Q]$ получен в результате гомоморфизма трансфера из некоторого элемента $\beta_{k-1} \in Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j,\kappa_{j+1}}(k-1, n-k+1)$. Элемент y_{k-1} задан скошенно-оснащенным многообразием V^{k-1} и набором когомологических классов A_V, который индуцирован ограничением набора соответствующих классов с $M^{2^k-2}\times I$. Заметим, что многообразие Q^{k-1} служит двулистным накрывающим над V^{k-1}. При этом когомологический класс $\kappa_{j+1} \in H^1(V^{k-1}; \mathbb{Z}/2)$, относительно которого берется трансфер, совпадает с $\kappa_{M\times I}|_V$. Характеристический класс κ_Q скошенного оснащения Ξ_Q многообразия Q^{k-1} получен при трансфере характеристического класса $\bar{\lambda} = \kappa_V$ скошенного оснащения Ξ_V. (Заметим, что этот же характеристический класс κ_Q индуцируется из класса когомологий $\kappa_{j+1} = \kappa_M|_V$ при накрытии $Q^{k-1} \to V^{k-1}$.) Предложение 38 доказано.

Доказательство Теоремы 29 о ретракции

Рассмотрим натуральное число ψ, определенное в Предложении 32 для значения параметра ретракции равного $d-1$. Тогда гомоморфизм (153) полного трансфера на группе $Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_\psi}(d-1,n-d+1)$ оказывается тривиальным. Определим натуральное число $l(d) = \exp_2(\exp_2 \dots \exp_2(d) \dots + 1)$, где число итераций функции $\exp_2(x+1) = 2^{x+1}$ равно ψ, а начальное значение $x = d-1$.

Пусть l'– произвольная степень двойки, не меньшая, чем $l(d)$. Определим $n = l' - 2$. Докажем, что произвольный элемент группы $Imm^{sf}(n-1,1)$ допускает ретракцию порядка d.

Положим $n_0 = l(d) - 2$, по предположению $n_0 \le n$. Определим последовательность из ψ чисел: $2n_1 = log(n_0+2) - 2$, $2n_2 = log_2(n_1 + 2) - 2$, $\dots$, $2n_\psi = log_2(n_{\psi-1}+2) - 2$. Все указанные числа являются натуральными, при этом $n_\psi = d-1$.

Пусть $x \in Imm^{sf}(n-k,k)$– произвольный элемент, $x_{d-1} \in Imm^{sf}(d-1,n-d+1)$–полное препятствие к построению ретракции порядка $d-1$ для исходного элемента x. Рассмотрим образ этого элемента $x_{n_0} \in Imm^{sf}(n_0, n-n_0)$. Заметим, что препятствие x_{d-1} является также препятствием к ретракции порядка $(d-1)$ элемента x_{n_0}.

Рассмотрим препятствие $x_{n_1} \in Imm^{sf}(n_1, n-n_1)$ к построению ретракции порядка n_1 для α_{n_0}. По Предложению 34, существует элемент $y_{n_1} \in Imm^{sf;\kappa_1}(n_1,n-n_1)$, представленный скошенно-оснащенным многообразием $X_1^{n_1}$ с характеристическим классом $\kappa_{X_1^{n_1}} \in H^1(X_1^{n_1};\mathbb{Z}/2)$ скошенного оснащения, который переходит при трансфере относительно когомологического класса $\kappa_1 = \kappa_N|_{X_1}$ в элемент x_{n_1}.

Рассмотрим препятствие $y_{n_2} \in Imm^{sf;\kappa_1}(n_2, n-n_2)$ к ретракции порядка n_2 для элемента y_{n_1}. Снова по Предложению 34, существует элемент $z_{n_2} \in Imm^{sf;\kappa_1,\kappa_2}(n_2,n-n_2)$ такой, что элемент $r_2(z_{n_2})$ препятствует к ретракции порядка n_2 для элемента y_{n_1}. Элемент $r_{tot}(z_{n_2}) = r_1 \circ r_2(z_{n_2}) = J^{sf}_{n_2}(x_{n_0}) = x_{n_2}$ служит препятствием к ретракции порядка (n_2) для элемента x_{n_1}. Этот же элемент x_{n_2} служит полным препятствием к ретракции порядка (n_2) для исходного элемента x.

Рассуждая по индукции, получаем, что препятствие к построению ретракции порядка $(d-1)$ для элемента x получено в результате применения полного ψ-кратного трансфера к некоторому элементу $\varepsilon \in Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_\psi}(d-1,n-d+1)$. По Предложению 32 $r_{tot}(\varepsilon) = 0$. Следовательно, $x_{d-1} = 0$. Теорема 29 о ретракции доказана.

Добавление

Обозначим через $b = b(k)$– произвольную степень двойки, кратную степени 2^k. При этом предпологается, что $n + 2 \geq 2^{b(k)}$. Обозначим натуральное число $(n - 2b(k) + k + 3)$ через s.

Гипотеза 39. *Произвольный класс кобордизма $\alpha \in Imm^{sf,\kappa_1,\dots,\kappa_j}(b(k) - 1, n - b(k) + 1)$, представлен многообразием $M^{b(k)-1}$ со скошенным оснащением Ξ_M и набором характеристических классов $\kappa_M \in H^1(M^{b(k)-1};\mathbb{Z}/2)$, $\kappa_i \in H^1(M^{b(k)-1};\mathbb{Z}/2)$, $i = 1,\dots,j$ таким, что многообразие $M^{b(k)-1}$ погружается в пространство $\mathbb{R}^{2b(k)-2-k}$. Эквивалентно, найдется семейство $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$ сечений нормального расслоения $\nu(M) = (n - b(k) + 1)\kappa_M$, которое не имеет вырождений.*

При доказательстве Предложения 38 мы воспользовались следующим следствием Гипотезы 39.

Следствие 40. *Произвольный класс кобордизма $\alpha \in Imm^{sf;\kappa_1,\dots,\kappa_j}(b(k) - 1, n - b(k) + 1)$, представлен многообразием $M^{b(k)-1}$ со скошенным оснащением Ξ_M и набором характеристических классов $\kappa_M \in H^1(M^{b(k)-1};\mathbb{Z}/2)$, $\kappa_i \in H^1(M^{b(k)-1};\mathbb{Z}/2)$, $i = 1,\dots,j$. При этом найдется семейство $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$ сечений нормального расслоения $\nu(M) = (n - b(k) + 1)\kappa_M$, которое не имеет вырождений над подмногообразием $N^{b(k)-2} \subset M^{b(k)-1}$, представляющим эйлеров класс расслоения κ_M.*

Мы докажем Следствие 40 в предположении $j = 0$. При этом мы воспользуемся основным результатом работы [A-E], согласно которому естественный гомоморфизм $Imm^{fr}(k,1) \to Imm^{sf}(k, b(k) - 1)$ является тривиальным (это утверждение доказано в [A-E] даже при более слабых размерностных ограничениях).

Замечание

Гипотеза 39 (для произвольного j вытекает из результата Коэна [C], согласно которому многообразие $M^{b(k)-1}$ допускает погружение в пространство $\mathbb{R}^{2b(k)-k-2}$. Из существования такого погружения вытекает, что нормальное расслоение $\nu(M)$ размерности $dim(\nu) = n + 1 - b(k)$ имеет, по меньшей мере, $(n - 2b(k) + k + 3)$ невырождднных сечения. Над подмногообразием $N^{b(k)-2} \subset M^{b(k)-1}$ это семейство сечений подавно не вырождается.

Доказательство Следствия 40 при $j = 0$

Доказательство основано на теореме о погружаемости стандартного проективного пространства $\mathbb{RP}^{b(k)-1}$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2b(k)-k-2}$.

Обозначим для краткости $dim(M) = b(k)-1$ через m. Тогда $dim(N) = m-1$. Обозначим расслоение $\nu_M|_{N^{m-1}}$ через ν_N, нормальное расслоение к многообразию N^{m-1} через ν_N, расслоение $\kappa_M|_N$ через κ_N. Заметим, что $(n - b(k) + 2)\kappa_N = \nu_N$ и что $\nu_N \times \kappa_N = \bar{\nu}_N$. Определена проекция $\pi : \bar{\nu}_N \to \nu_N$ расслоений с ядром κ_N.

Заметим, что расслоение $(n - b(k) + 2)\kappa_{\mathbb{RP}^m}$ является обратным расслоением к касательному расслоению $T(\mathbb{RP}^m) = b(k)\kappa_{\mathbb{RP}^m}$ и, следовательно, является нормальным расслоением к $\mathbb{RP}^m$ размерности $(n - b(k) + 2)$. Рассмотрим невырожденное (стандартное) s–семейство сечений расслоения $(n - b(k) + 2)\kappa_{\mathbb{RP}^m}$. Это семейство определено, поскольку многообразие $\mathbb{RP}^m$ погружается в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2b(k)-k-2}$. Рассмотрим отображение $\kappa_N : N^{m-1} \to \mathbb{RP}^m$ и индуцируем этим отображением невырожденное s–семейство общего положения сечений расслоения $\bar{\nu}_N$ и семейство проекций этого семейства, которое является семейством сечений (вообще говоря, вырожденных) расслоения ν_N:

$$\{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_s\}, \qquad \{\psi_1, \dots, \psi_s\}_{N^{m-1}\times\{0\}}. \tag{160}$$

Не ограничивая общности, в классе нормального кобордизма многообразия N^{m-1} выберем представитель, имеющий гомотопический k-тип пространства $\mathbb{RP}^{\infty}$, индуцированный отображении κ_N.

Будем рассуждать по индукции с параметром $i = 0, \dots, k$. Пусть построена гомотопия

$$\{\bar{\chi}_1, \dots, \bar{\chi}_s\}_{N^{m-1}\times[0,i]}, \qquad \{\chi_1, \dots, \chi_s\}_{N^{m-1}\times[0,i]}, \tag{161}$$

с граничными условиями:

$$\{\bar{\chi}_1, \dots, \bar{\chi}_s\}_{N^{m-1}\times\{0\}} = \{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_s\}_{N^{m-1}\times\{0\}}, \tag{162}$$

$$\{\bar{\chi}_1, \dots, \bar{\chi}_s\}_{N^{m-1}\times\{i\}} = \{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_s\}_{N^{m-1}\times\{i\}}. \tag{163}$$

При этом выполнены нижеследующие условия 1-3.

–1. Подсемейство $\{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{s-k+i+1}\}_{N^{m-1}\times\{i\}}$ семейства (163) является невырожденным.

–2. В семействе проекций $\{\psi_1, \dots, \psi_s\}_{N^{m-1}\times\{i\}}$ семейства сечений (163) подсемейство $\{\psi_1, \dots, \psi_{s-k+i}\}_{N^{m-1}\times\{i\}}$ является невырожденным.

–3. Гомотопия (161) имеет, быть может, вырождение с тривиальным линейным расслоением ядер.

Обозначим через $L^i \subset N^{m-1} \times \{i\}$ – i-мерное подмногообразие базы, над которыми подсемейство $\{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{s-k+1+i}\}_{N^{m-1}\times\{i\}}$ пересекается с подрасслоением κ_N (т.е. семейство проекций $\{\xi_1, \dots, \xi_{s-k+1+i}\}$ вырождается).

Базовый шаг индукции

При $i = 0$ фундаментальный класс многообразия L^0 представляет гомологический эйлеров класс в группе $H_0(N^{m-1};\mathbb{Z}/2)$. Этот гомологический класс двойственен в смысле Пуанкаре когомологическому классу $w_{b(k)-2}((n-b(k)+1)\kappa_N = w_1(\kappa_N)^{b(k)-2} \in H^{b(k)-2)}(N^{m-1};\mathbb{Z}/2)$ и полностью определяется характеристическим числом

$$\langle w_1^{m-1)}(\kappa_N);[N^{m-1}]\rangle = \langle w_1^m(\kappa_M);[M^m]\rangle.$$

Указанное характеристическое число равно нулю, поскольку многообразие $N^{b(k)-2}$ ориентированно и имеет 1-гомотопический тип $\mathbb{RP}^m$. Тем самым, при $i = 0$ в классе изотопии невырожденного семейства сечений $\{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_s\}_{N^{m-1}\times\{0\}}$ найдется семейство для которого подсемейство проекций $\{\psi_1, \dots, \psi_{s-k+1}\}_{N^{m-1}\times\{0\}}$ не вырождается, что обеспечивает основание индукции.

Для доказательства индуктивного предположим, что гомотопия (161) уже построена при $i = i_0 - 1$ и построим такую же гомотопию при $i = i_0$. Вначале построим регулярную гомотопию

$$\{\bar{\chi}_1, \dots, \bar{\chi}_{s-k+i_0+1}\}_{N^{m-1}\times[i_0,i_0+1]} \tag{164}$$

заданного семейства сечений $\{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{s-k+i_0+1}\}_{N^{m-1}\times\{i_0\}}$ к семейству сечений $\{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{s-k+i_0+1}\}_{N^{m-1}\times\{i_0+1\}}$ (условие регулярности на компоненте границы $N^{m-1} \times \{i_0\}$ выполнено по индуктивному предположению), для которой семейство проекций

$$\{\psi_1, \dots, \psi_{s-k+i_0+1}\}_{N^{m-1}\times\{i_0+1\}} \tag{165}$$

не имеет вырождений.

Рассмотрим i_0-мерное подмногообразие $L^{i_0} \subset N^{m-1} \times \{i_0\}$, состоящее из точек, в которых подсемейство $\{\psi_1, \dots, \psi_{s-k+i_0+1}\}_{N^{m-1}\times\{i_0\}}$ вырождается. Из индуктивного предположения следует, что ограничение класса κ_N на подмногообразие L^{i_0} тривиально, следовательно, подмногообразие $L^{i_0} \subset N^{m-1} \times \{i_0\}$ является оснащенным. Обозначим оснащение многообразия L^{i_0} через Ξ_L.

Согласно основному результату [A-E] существует (i_0+1)-мерное скошенно-оснащенное в коразмерности $(b(k)-1)$ многообразие $(\Gamma^{i_0+1}, \Psi_\Gamma)$, с краем $\partial\Gamma^{i_0+1}$, диффеоморфным многообразию L^{i_0}, при этом ограничение скошенного оснащения Ψ_Γ на границу L^{i_0} является оснащением, которое совпадает с заданным оснащением Ξ_L на крае L^{i_0}.

Поскольку N^{m-1} имеет гомотопический k-тип $\mathbb{RP}^\infty$ и нормальное расслоение ν_N снабжено канонической тривиализацией на любом подмногообразии в N^{m-1} размерности не более k, скошенно-оснащенное многообразие Γ^{i_0+1} можно рассматривать как подмногообразие $\Gamma^{i_0+1} \subset N^{m-1}\times[i_0, i_0+1]$ со стабильным скошенным оснащением Ψ_Γ, ограничение которого на $\partial\Gamma^{i_0+1}$ совпадает с подмногообразием $L^{i_0} \subset N^{m-1} \times \{i_0\}$ и при этом ограничение κ_N на подмногообразие Γ^{i_0+1} совпадает с характеристическим классом скошенного оснащения Ξ_Γ.

Регулярная гомотопия (164) определена по поднятию проекции

$$\{\chi_1, \dots, \chi_{s-k+i_0+1}\}_{N^{m-1}\times[i_0,i_0+1]}, \tag{166}$$

для которой подмногообразие $(\Gamma^{i_0+1}, L^{i_0}) \subset (N^{m-1}\times[i_0, i_0+1], N^{m-1}\times\{i_0\})$ служит подмногообразием особых сечений с тривиальным линейным расслоением ядер.

Теперь построим гомотопию (161) при $i = i_0+1$. На отрезке $[0, i_0]$ гомотопия уже построена по предположению индукции. На отрезке $[i_0, i_0+1]$ на подсемействе первых $(s-k+i_0+1)$ векторов гомотопия совпадает с гомотопией (164). Заметим, что особые слои гомотопии

$$\{\bar\chi_1, \dots, \bar\chi_{s-k+i_0+2}\}_{N^{m-1}\times[0,i_0]}$$

образуют многообразие с краем, которое обозначим через

$$(\Delta^{i_0+1}, K^{i_0}) \subset (N^{m-1}\times[0,i_0], N^{m-1}\times\{i_0\}). \tag{167}$$

В силу условия 3, подмногообразие (167) является оснащенным. Обозначим оснащение этого подмногообразия через Ψ_Δ. Граница K^{i_0} многообразия Δ^{i_0+1} является подмногообразием особенностей семейства сечений

$$\{\bar\psi_1, \dots, \bar\psi_{s-k+i_0+2}\}_{N^{m-1}\times\{i_0\}}. \tag{168}$$

Воспользуемся тем, что многообразие особых сечений семейства $\{\bar\psi_1, \dots \bar\psi_{s-k+i_0+1}\}_{N^{m-1}\times\{i_0\}}$ заключено в шар $U \subset N^{m-1}$. Будем строить гомотопию (161) на подсемействе первых $(s-k+i_0+2)$ векторов на многообразии $N^{m-1} \times [i_0, i_0 + 1]$, неподвижную на границе ∂U шара U, и совпадающую с гомотопией (164) на подсемействе первых $(s - k + i_0 + 1)$ векторов. Указанную гомотопию построим так, что многообразие особенностей семейства сечений (168) перестраивается вдоль оснащенного многообразия с краем

$$(\Delta_1^{i_0+1}, K^{i_0}) \subset (N^{m-1} \times [i_0, i_0 + 1], N^{m-1} \times \{i_0\}),$$

которое зеркально оснащенному подмногообразию (167) и совпадает с этим многообразием на общей границе $K^{i_0} \subset N^{m-1} \times \{i_0\}$.

Гомотопия (161) при $i = i_0 + 1$ на семействе первых $(s - k + i_0 + 2)$ векторов построена. Продолжим построенную гомотопию на все семейство s векторов над многообразием $N^{m-1} \times [i_0, i_0 + 1]$, обеспечив выполнение граничных условий на $N^{m-1} \times \{i_0\}$ и выполнение условия 3.

Индуктивное предположение доказано. Следствие 40 в предположении $j = 0$ доказано.

Список литературы

[A] P.M.Akhmet'ev, *Geometric approach towards stable homotopy groups of spheres. The Adams-Hopf invariants*, a talk at the M.M.Postnikov Memorial Conference (2007)– "Algebraic Topology: Old and New" and at the Yu.P.Soloviev Memorial Conference (2005) "Topology, analysis and applications to mathematical physics". The complete version (in Russian) arXiv:0710.5779; arXiv:0710.5853.

[A-E] P.M.Akhmet'ev and P.J.Eccles, *The relationship between framed bordism and skew-framed bordism*, Bull. London Math. Soc., vol 39 (2007) 473-481.

[B-J-M] M.G. Barrat, J.D.S. Jones and M.E. Mahowald, *The Kervaire invariant one problem*, Contemporary Mathematics Vol 19, (1983) 9-22.

[B-R-S] S. Buoncristiano, C. P. Rourke, B. J. Sanderson *A Geometric Approach to Homology Theory.* London Math. Soc. LNS Vol 18, Cambridge Univ. Press (1976)

[C1] Carter, J.S., *Surgery on codiomension one immersions in $\mathbb{R}^{n+1}$: removing n-tuple points.* Trans. Amer. Math. Soc. 298 (1986), N1, pp 83-101.

[C2] Carter, J.S., *On generalizing Boy's surface: constructing a generator of the third stable stem.* Trans. Amer. Math. Soc. 298 (1986), N1, pp 103-122.

[C] R.L.Cohen *The Immersion Conjecture for differentiable manifolds* Ann. Math. 122 N2 237-328 (1985).

[C-J-M] R.L.Cohen, J.D.S.Jones and M.E.Mahowald *The Kervaire invariant of immersions* Invent. math. 79, 95-123 (1985).

[E1] P.J. Eccles, *Codimension One Immersions and the Kervaire Invariant One Problem*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., vol.90 (1981) 483-493.

[G-M] L. Guillou and A.Marin (eds.), *A la recherche de la topologie perdue* (Franch), (Prog. Math.,62) Birkhauser, Boston-Busel-Stuttgart (1986); Russian transl., *In searching for lost topology*, Мир, Москва (1986).

[K1] U.Koschorke, *Multiple points of immersions and the Kahn-Priddy theorem*, Math.Z., 169 (1979) 223-236.

[K2] U.Koschorke, *Nonstable and stable monomorphisms of vector bundles.* Topology and Applications 75 (1987) 261-286

[P] L.S.Pontryagin, *Smooth manifolds and their applications to homotopy theory*, 2-nd ed., Nauka, Moscow (1976), English transl.: L.S.Pontryagin, Selected Works, Vol. 3, Algebraic and Differential topology, pp. 115-252, Gordon and Breach Scientific Publishers (1986).

[S] V.P.Snaith, *Stable Homotopy Theory around the Arf-Kervaire invariabt* Preprint (2008).

[T] H.Toda, *Composition methods in the homotopy groups of spheres*, Ann.Math.Studies 49 Princeton 1962; пер. Мир Москва 1982.

Московская Область, Троицк, 142190, ИЗМИРАН.
pmakhmet@izmiran.rssi.ru